

Vektorfunktioner vha. CAS



Forord

Vi skal i de kommende uger arbejde med emnet Vektorfunktioner ved:

- 1) at I selv arbejder med siderne 3 – 10 som en opstart. Siderne baserer sig på CAS-programmet TI-Nspire. Der er dog i Appendix A introduktioner til, hvordan man også kan bruge Mathcad, Graphmatica og TI89.
- 2) at lærebogen bruges i samarbejde med læreren (MAT A – HTX. Kap. 2 s. 79 – 107ø eller MAT A3 – STX. Kap. A2 – Parameterkurver s. 177 – 203).
- 3) at der arbejdes i grupper med siderne 12 – 18.

Indholdsfortegnelse

Forord.....	2
Vektorfunktioner.....	3
TI-Nspire.....	4
Eksperimenter vha. CAS – 1.....	8
Lærebogen.....	11
Længden af en banekurve.....	12
Arealer begrænset af banekurver.....	14
Krumning af parameterkurver.....	16
Eksperimenter vha. CAS – 2.....	18
Appendix A.....	19

Vektorfunktioner

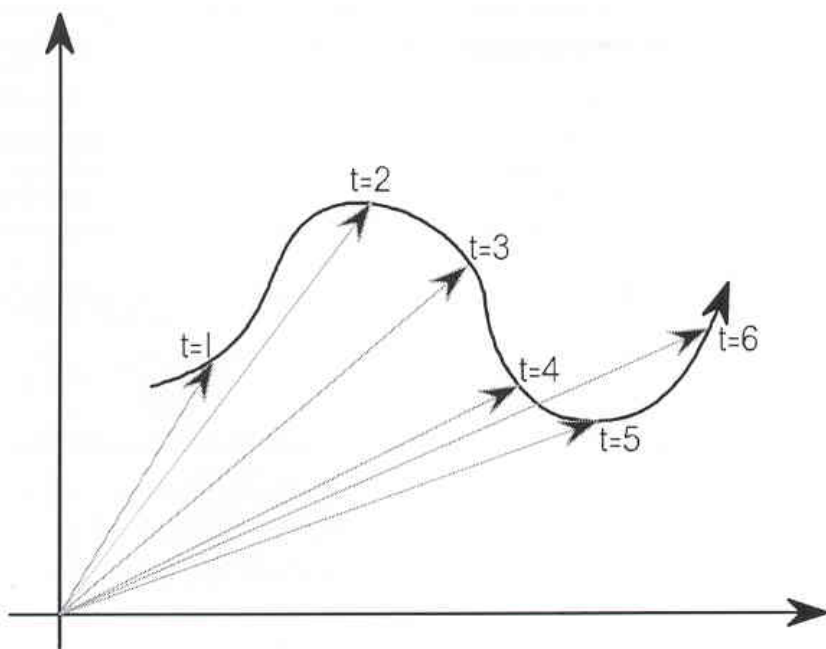
Generelt om vektorfunktioner

Definition:

Ved en vektorfunktion forstås en funktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

hvor $x(t)$ og $y(t)$ er reelle funktioner. Disse kaldes koordinatfunktioner. Vektorfunktionens definitionsmængde er reelle tal, og værdimængden er vektorer.

Grafen for en vektorfunktion kaldes en banekurve.



Eksempel på en banekurve

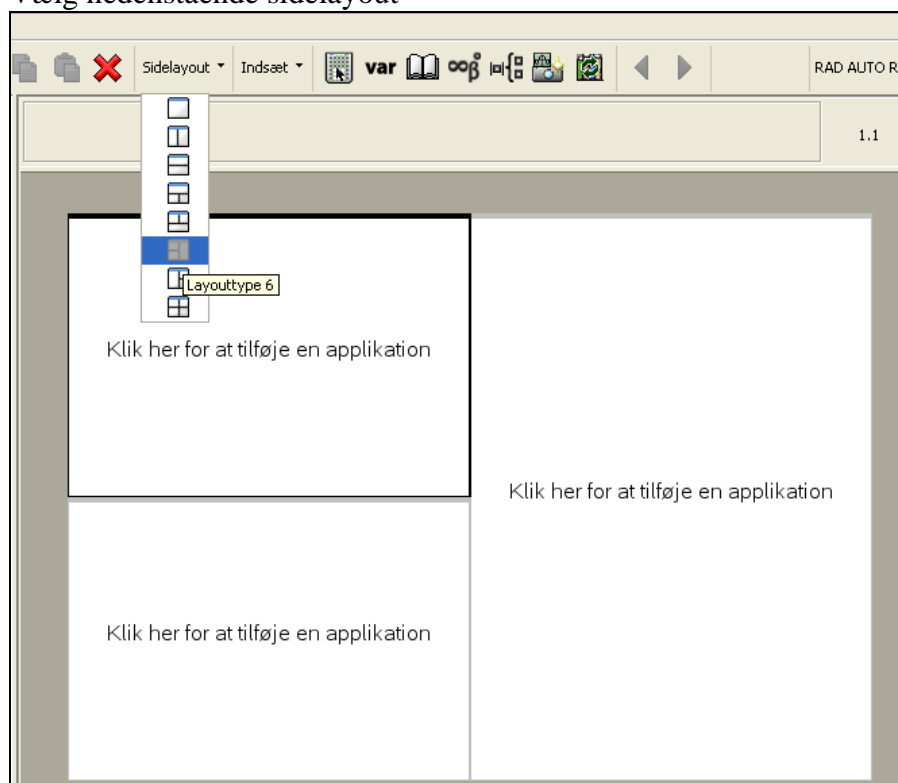
Et eksempel på en parameterfremstilling for en ret linje:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

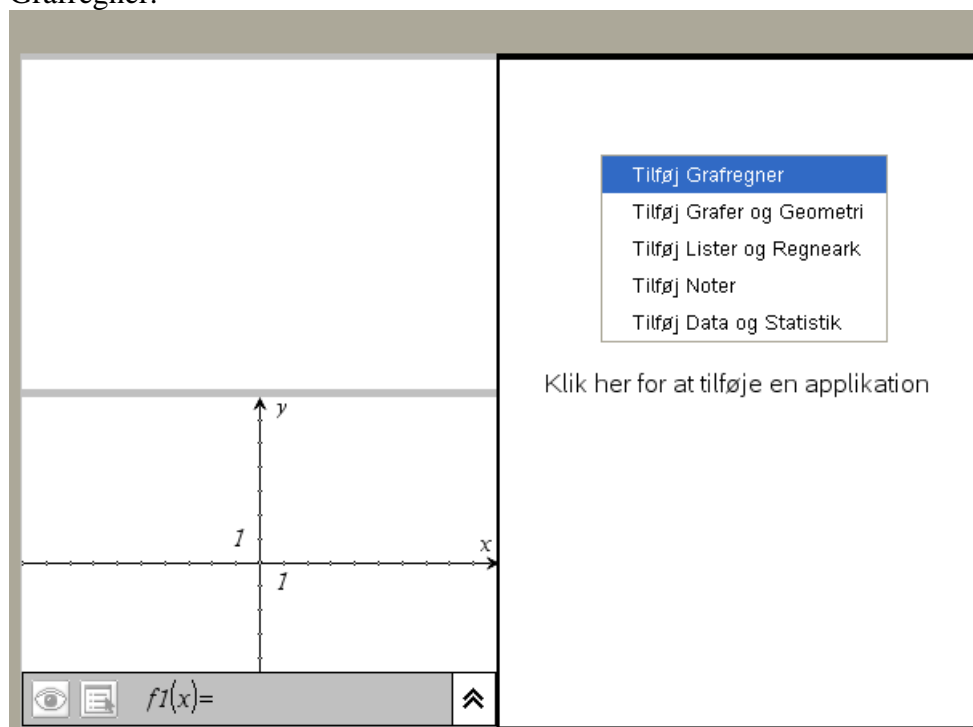
TI-Nspire

I dette afsnit er kort beskrevet, hvordan man arbejder med vektorfunktioner i TI-Nspire.

Vælg nedenstående sidelayout

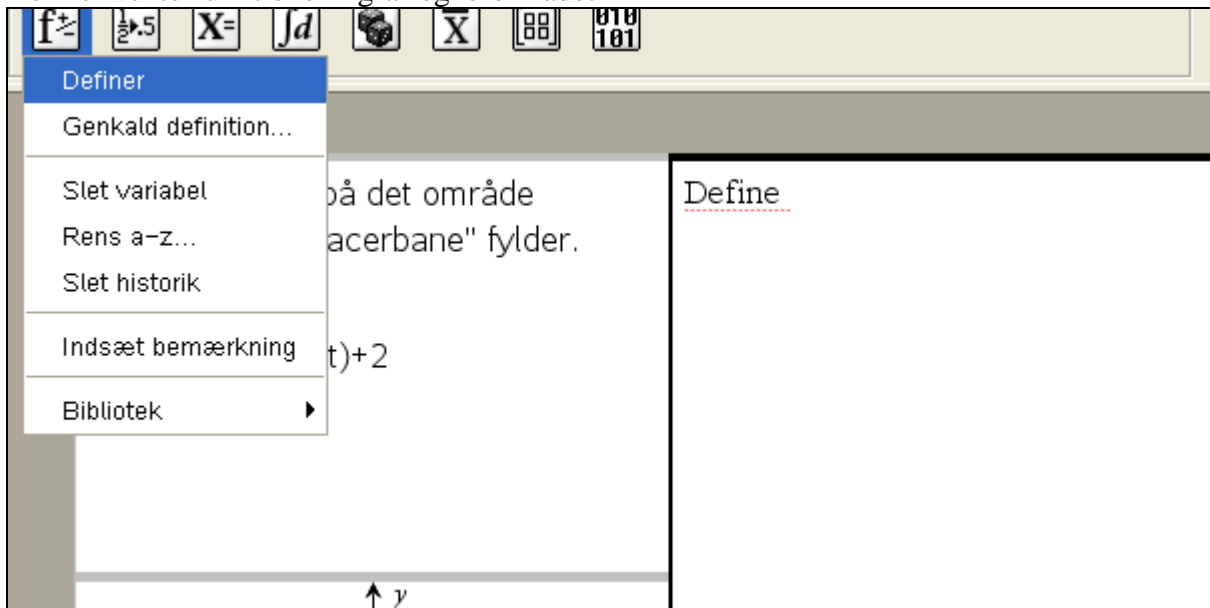



Tilføj øverst i venstre kolonne Noter, i nederste venstre kolonne Grafer og Geometri og til højre Grafregner.

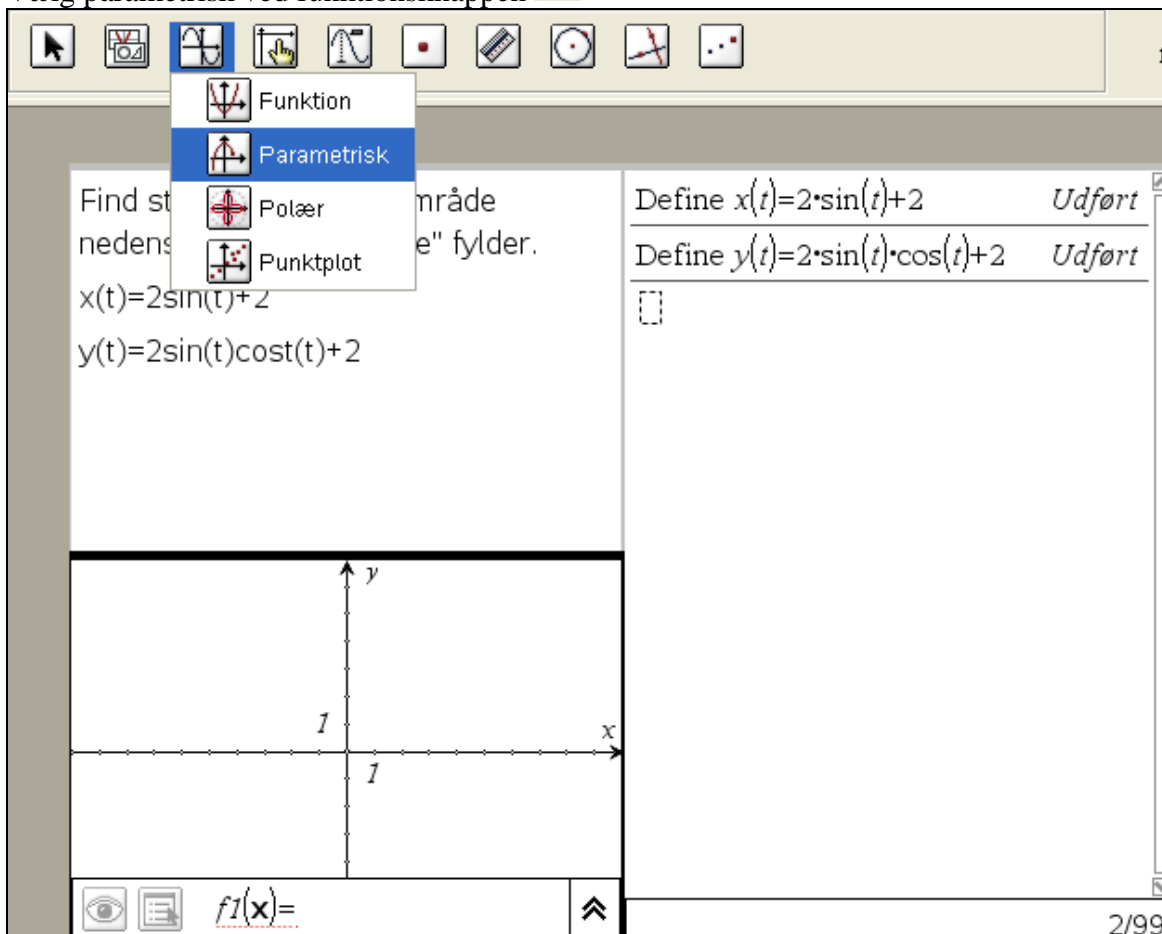



Tekst (opgaveformulering/dokumentation m.m.) kan indskrives i note-feltet.

Definer vektorfunktionen i grafregnerområdet



Vælg parametrisk ved funktionsknappen 



Lommeregner tastaturet tændes i øverste linje ved . Indtast den definerede vektorfunktion.

The screenshot shows the TI-Nspire CAS interface. The workspace contains the following text and equations:

Find størrelsen på det område
nedenstående "racerbane" fylder.
 $x(t) = 2\sin(t) + 2$
 $y(t) = 2\sin(t)\cos(t) + 2$

Define $x(t) = 2\sin(t) + 2$ Udført
 Define $y(t) = 2\sin(t)\cos(t) + 2$ Udført

The graph shows a coordinate system with x and y axes. A small box at the bottom of the graph contains the following code:

```

x1(t)=x(t)
y1(t)=y(t)
0≤t≤4π tstep=0.13
  
```

A keyboard overlay titled "Tastatur" is visible on the right side of the screen, showing various function keys like sin, cos, tan, and mathematical symbols.

Ændr på akserne ved at trække i dem med "hånd"-musen!!

The screenshot shows the same workspace as above, but with a zoomed-in view of the graph. The axes are labeled with 0.5. The graph shows a figure-eight curve. A small box at the bottom of the graph contains the following code:

```

x1(t)=x(t)
y1(t)=y(t)
0≤t≤12.57 tstep=0.13
  
```

The text "x1(t)=x(t)" and "y1(t)=y(t)" is written next to the axes, and "akser" is written below it.

Der "beregnes" på funktionen!

Find størrelsen på det område nedenstående "racerbane" fylder.

Define $x(t) = 2 \cdot \sin(t) + 2$ *Udført*
 Define $y(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + 2$ *Udført*

$\frac{d}{dt}(y(t)), t$

$t = \frac{(8 \cdot n + 1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n - 1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n + 3) \cdot \pi}{4}$

$t = 6.28319 \cdot (n + 0.125)$ or $t = 6.28319 \cdot (n - 0.125)$

$\text{solve}\left(0 = \frac{d}{dt}(x(t)), t\right)$ $t = \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi}{2}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 2

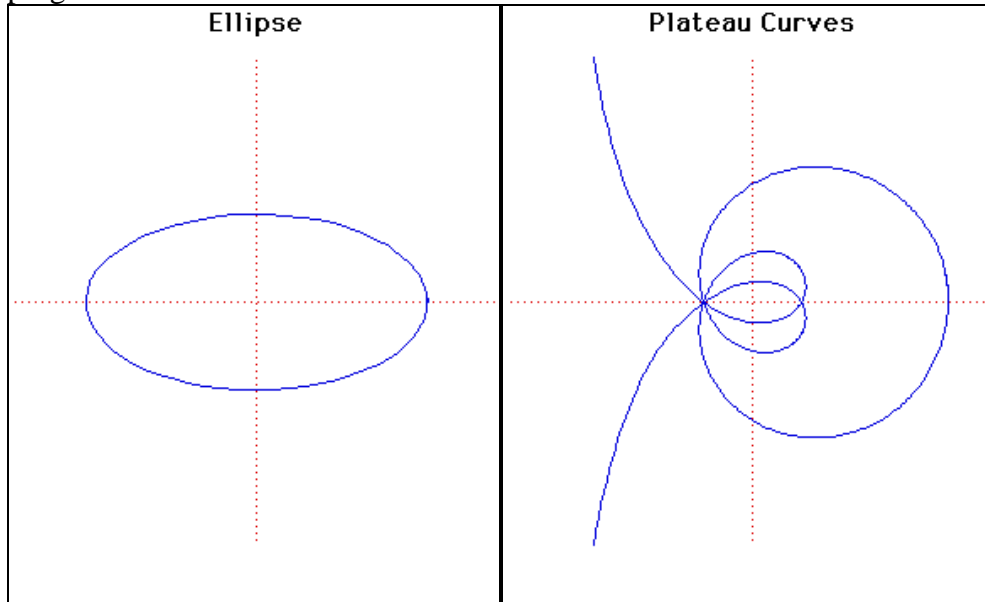
$x_1(t) = x(t)$
 $y_1(t) = y(t)$
 $0 \leq t \leq 12.57$ $tstep = t$

6/99

Eksperimenter vha. CAS – 1

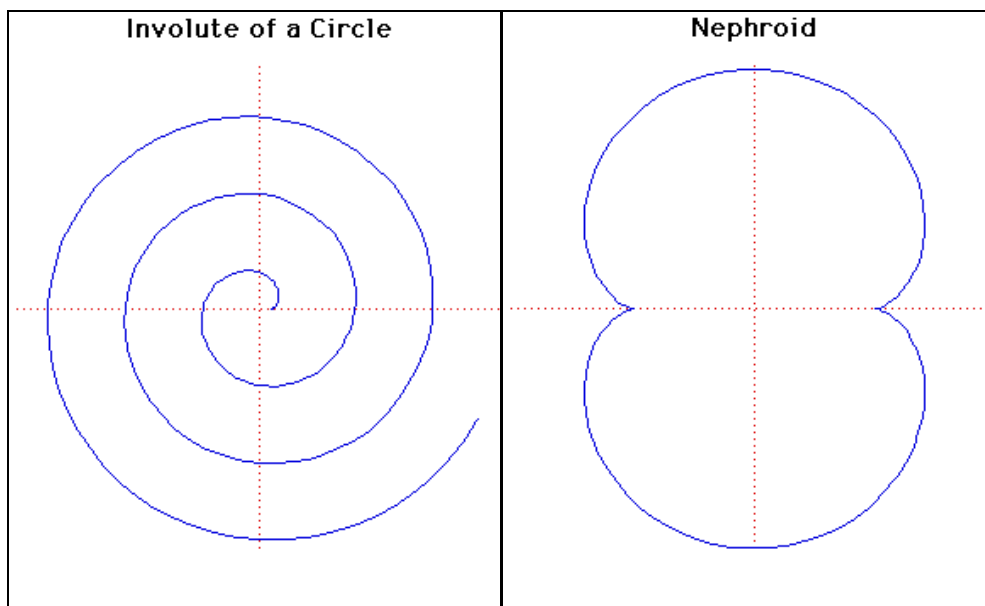
Opgave 1: Lav din egen skabelon til en animation vha. TINspire, TI89 eller Mathcad.

Opgave 2: Tegn/lav en animation af nogle af nedenstående vektorfunktioner vha. dit CAS-program.



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin((m+n) \cdot t) \\ \frac{\sin((m-n) \cdot t)}{2a \cdot \sin(mt) \cdot \sin(n \cdot t)} \\ \sin((m-n) \cdot t) \end{pmatrix}, \text{ hvor } a, m, n \in \mathbb{N}$$



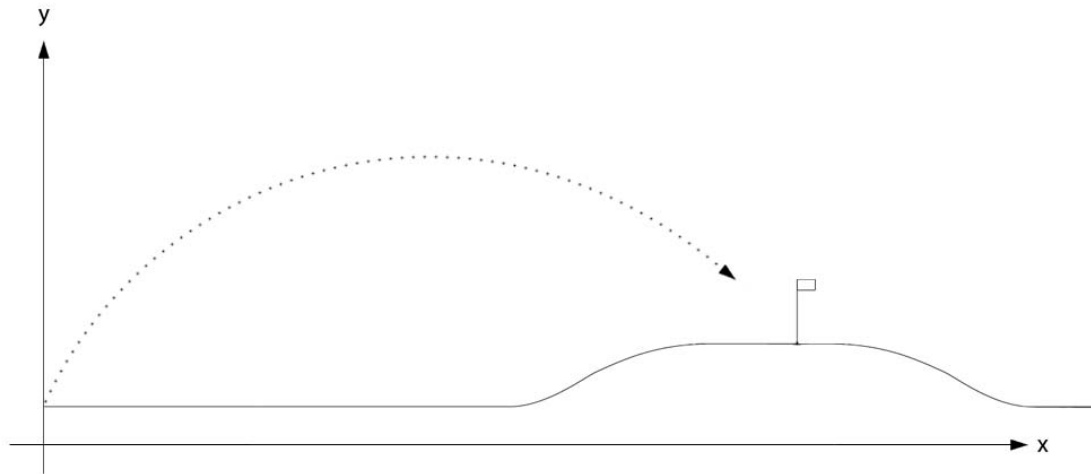
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)) \\ a \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$$

Ps. Involute = spiraldrejet

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (3 \cos(t) - \cos(3t)) \\ a \cdot (3 \sin(t) - \sin(3t)) \end{pmatrix}$$

Opgave 3:

- a) Tegn/lav animation af en golfbolds vej mod "hole in one".
Fastlæg banens længde, hullets højde over tee-stedet, boldens max-højde m.m. inden du forsøger dig med at animere banekurven. Opskriv vektorfunktionen.
- b) Overvej, hvordan nedslagspunkt, boldens "tid" i luften og boldens max-højde kan bestemmes.



Billede: Tommy Frost

- c) En bestemt dag er der sidevind på 3 m/s på banen.
Brug nedenstående skabelon fra Mathcad til at lave en banekurve i 3D, hvor der tages højde for sidevinden og forudsætninger fra a). $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

```

curve(t) :=  $\begin{pmatrix} -0.5t^2 + 9.82t \\ t \\ \frac{-4}{25}t^2 + \frac{40}{25}t \end{pmatrix}$ 
a0 := 0
a1 := 10
S := CreateSpace(curve, a0, a1)

```

S

S

Ved at holde musen nede kan man "trække rundt" med kurven.

Opgave 4: En skitur ned af et bjerg kunne have forskriften $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,66t + 3\cos(8t) \\ -0,452 \cdot t^4 \end{pmatrix}$

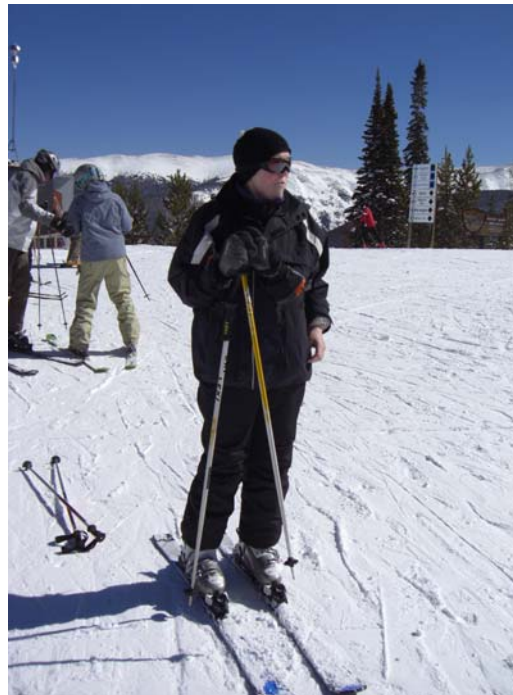
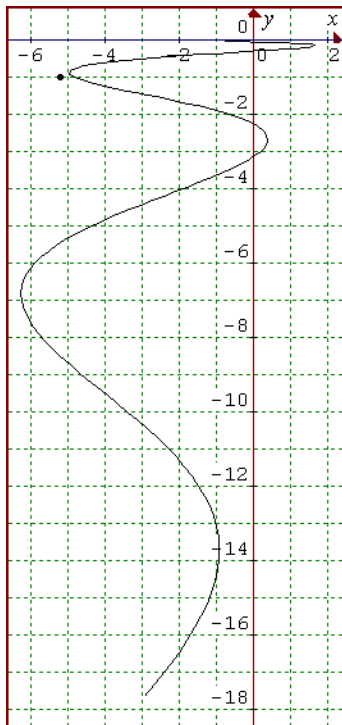
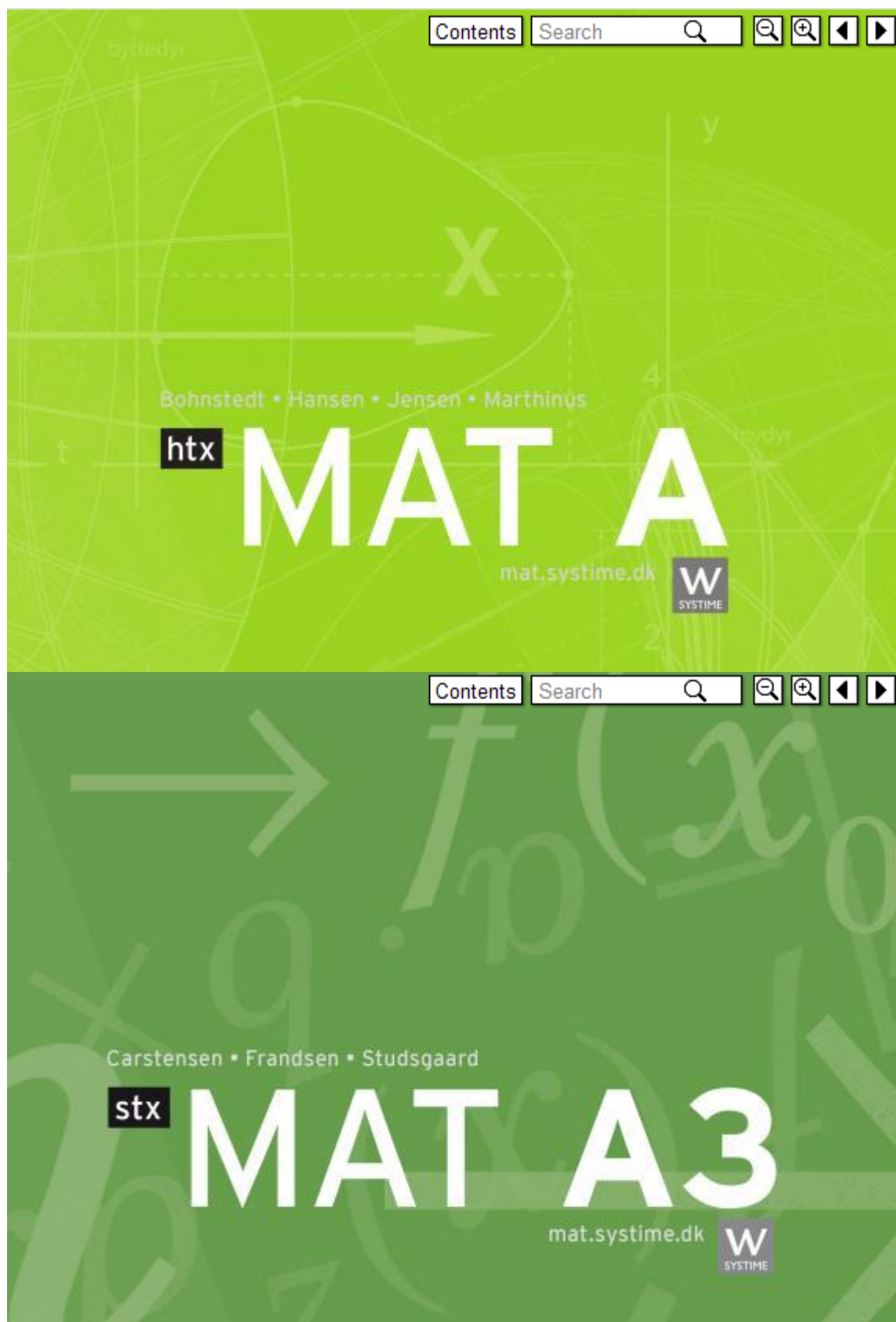


Foto: Peter Hammer Hansen

Forsøg selv at beskrive en tur ned af en skibakke med en vektorfunktion.

Lærebogen

Vi vender os nu mod lærebogen (se forord).



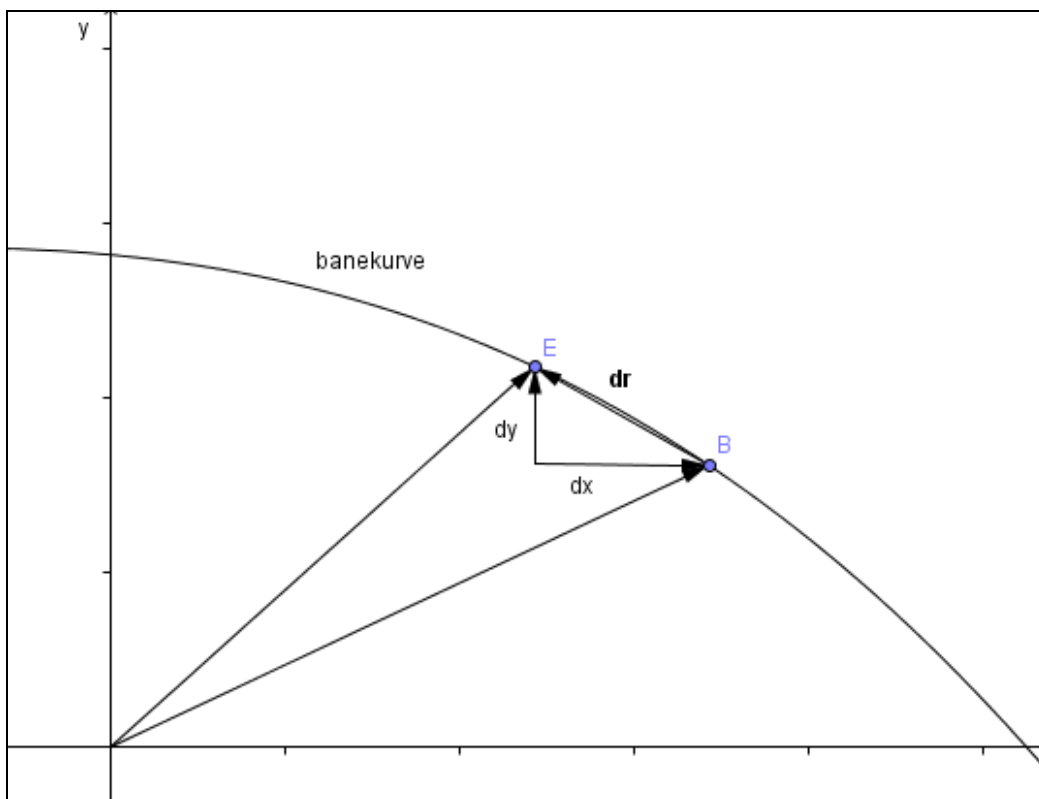
Længden af en banekurve

Sætning 1

Længden L af en banekurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ er givet ved

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2} dt = \\ &= \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt \end{aligned} \quad \text{hvor } t \in [a; b]$$

Bevis:



Kurven er givet ved $\vec{OB} = \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Længden af kurven mellem punkterne B og E kan

bestemmes ved at give tiden t en lille tilvækst $dt = \Delta t$, derved får x og y tilvæksterne $dx = x'(t)dt$ og $dy = y'(t)dt$. Herved får stedvektoren tilvæksten $d\vec{r}$, hvis længde er

$$L_i = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |\vec{v}(t)|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L_i = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$

Opgave 5:



I piratland i Legoland kan man få en hvirvlende tur i store sørøverbølger, hvor det gælder om at holde godt fast. Bølgerne bevæger sig cirkulært på en stor plade, herudover drejes 3 bølger sammen på en mindre plade og til sidst kan man selv dreje sin egen bølge rundt ved at dreje på et hjul i bølgen. Se billedet til venstre. Herved fremkommer en sammensat bevægelse.

Kilde: www.legoland.dk

Den sammensatte bevægelse kan f.eks. beskrives ved.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + 2 \cos(2t) + \cos(4t) \\ 4 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 2 \sin(2t) + \sin(4t) \end{pmatrix} \quad t \in [0; 4\pi]$$

hvor tiden t er i sekunder og $x(t)$ og $y(t)$ er i meter.

- Tegn banekurven for bevægelsen.
- Bestem, hvor langt en gæst bevæger sig i løbet af én omdrejning i piratbølgen.
- Service medarbejderen, der styrer sørøverbølgerne, sidder i sit skur i punktet $(9;1)$. Bestem den korteste afstand fra sørøverbølgerne til service medarbejderen.

Arealer begrænset af banekurver

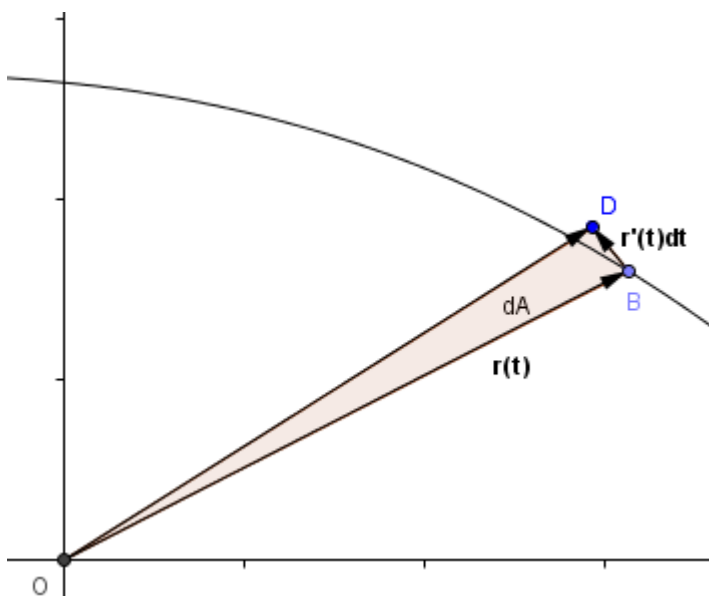
Sætning 2

Arealet A af det område, der afgrænses af banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ og linjerne

OB og OD , hvor $\overline{OB} = \vec{r}(a)$ og $\overline{OD} = \vec{r}(b)$ er givet ved

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_a^b \hat{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_a^b \det(\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) dt \right| \end{aligned}$$

Bevis:



Når et punkt gennemløber en banekurve, overstryger stedvektoren et areal. Se figuren ovenfor. Arealet A kan bestemmes ved, at det overstrøgne areal betegnet dA , i et lille tidsrum dt , kan bestemmes ved trekantsberegning, da hastighedsvektoren $\vec{r}'(t)$ står vinkelret på stedvektoren $\vec{r}(t)$.

Arealet A bestemmes ved $dA = \frac{1}{2} \cdot \left| \det(\vec{r}(t), \vec{r}'(t) dt) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \hat{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \right|$. Ved integration fås det overstrøgne areal i et tidsinterval $[a; b]$ til

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_a^b \hat{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \right|$$

Opgave 6:

En racerbane opbygges som et ottetal ved følgende vektorfunktion:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(t) + 4 \\ 4 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + 4 \end{pmatrix}.$$

- Optegn banekurven.
- Hvor meget plads skal man have for at kunne opstille racerbane?
- Find koordinaterne til kurvens dobbeltpunkt.
- Hvor langt skal bilen køre på en omgang?

Den indvendige del af banen skal males.

- Hvor stort et areal skal males?



Kilde : www.br.dk

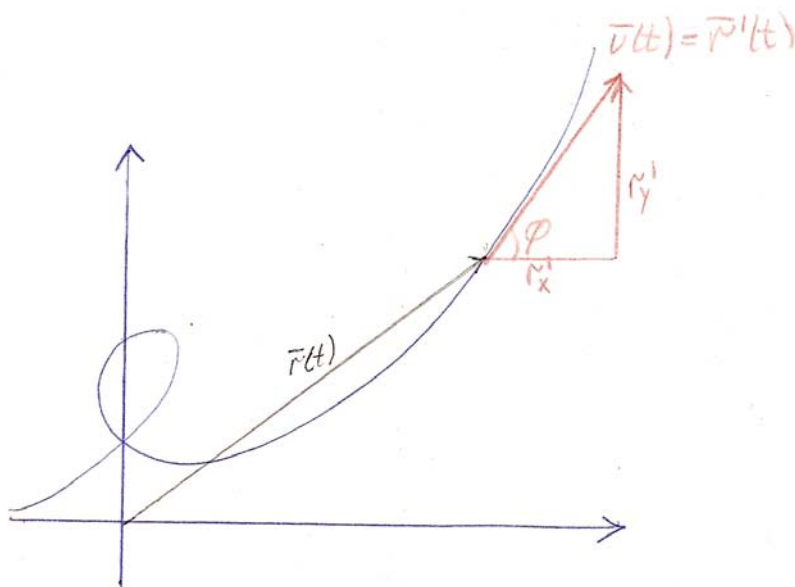
Krumning af parameterkurver

Sætning 3

Krumningen for en kurve med parameterfremstillingen $\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t \in I$ er:

$$\kappa(x) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bevís:



$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad (1)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{r_y'}{r_x'} \Rightarrow \varphi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{r_y'}{r_x'}\right) \text{ En sammensat funktion!}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r_y'}{r_x'}\right)^2} \left(\text{da } (\tan^{-1})' = \frac{1}{\tan'} = \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi)} \right)$$

$$= \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2}$$

Vi vender tilbage til (1)

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2} \cdot \frac{1}{v}, \text{ hvor } v = \sqrt{(r_x')^2 + (r_y')^2}$$
$$\kappa = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(r_x')^2 + (r_y')^2}} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{\left((r_x')^2 + (r_y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad q.e.d$$

Opgave 7: På billedet nedenfor ses en del af en Flexi-trax bane



I et koordinatsystem kan en del af banen tilnærmelsesvis beskrives ved vektorfunktionen.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 300t \\ -5t^3 - 15t^2 + 1000 \end{pmatrix}, \quad t \in [-5; 5]$$

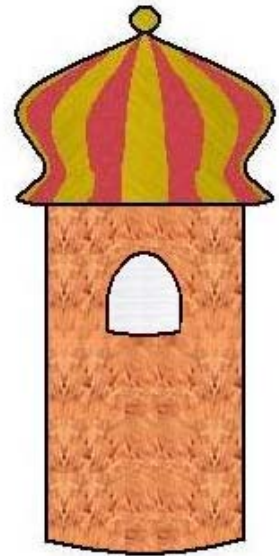
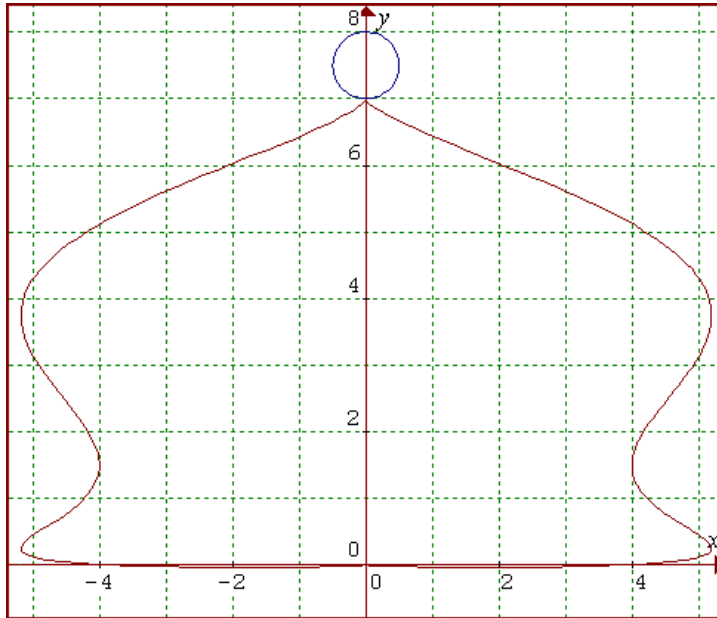
Alle mål er i mm.

- Tegn banekurven
- Bestem krumningen $\kappa(t)$ for $t = 2$.
- Bestem t-værdien, hvor krumningen er hhv. $10^{-5} m^{-1}$ og $-10^{-5} m^{-1}$.

Eksperimenter vha. CAS – 2

Opgave 8: Nedenstående vektorfunktion er afbilledet i et koordinatsystem. Billedet til højre kan evt. have noget med opgaven at gøre!

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) + \sin(5t) \\ -3,5 \cos(t) + \cos(2t) + 3,5 \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi]$$



Ud fra ovenstående oplysninger skal du stille en vektorfunktionsopgave til din nærmeste klassekammerat.

Opgave 9: Ud fra et af nedenstående billeder skal du stille en opgave om vektorfunktioner, der kan stilles til dine klassekammerater i næste aflevering.

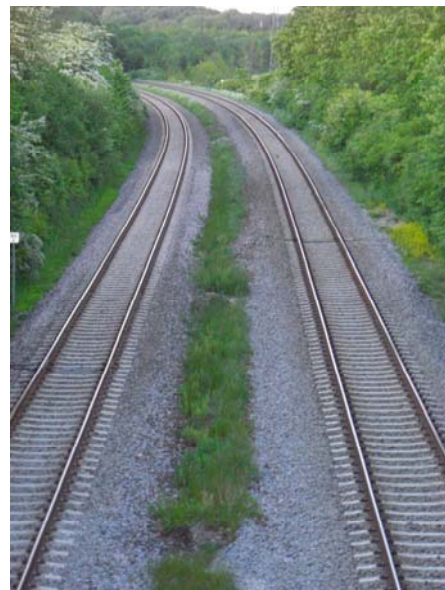
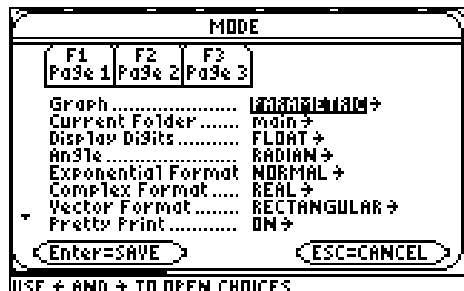


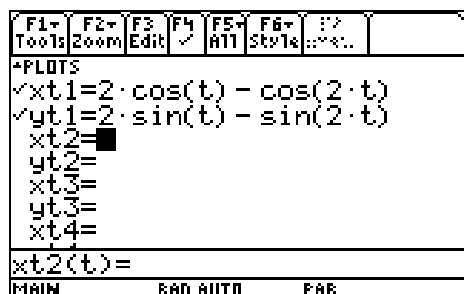
Foto: Marianne Mejlgaard

Appendix A

TI89:



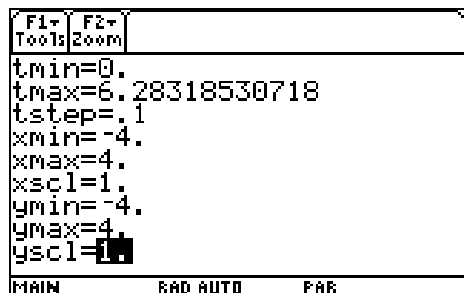
I menuen mode vælges tilstanden Parametric.



Tast Y=

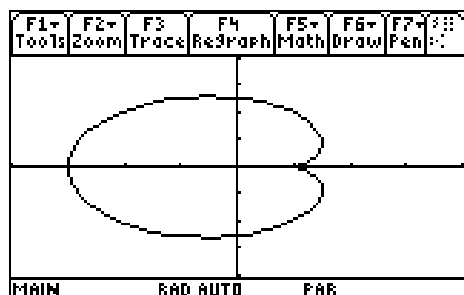
Koordinatfunktioner indtastes.

I dette tilfælde en kardioide.



"Fornuftige" grænser indtastes i WINDOW.

I dette tilfælde forløber $t \in [0; 2\pi]$



GRAPH.

Bemærk forløbet af kurven

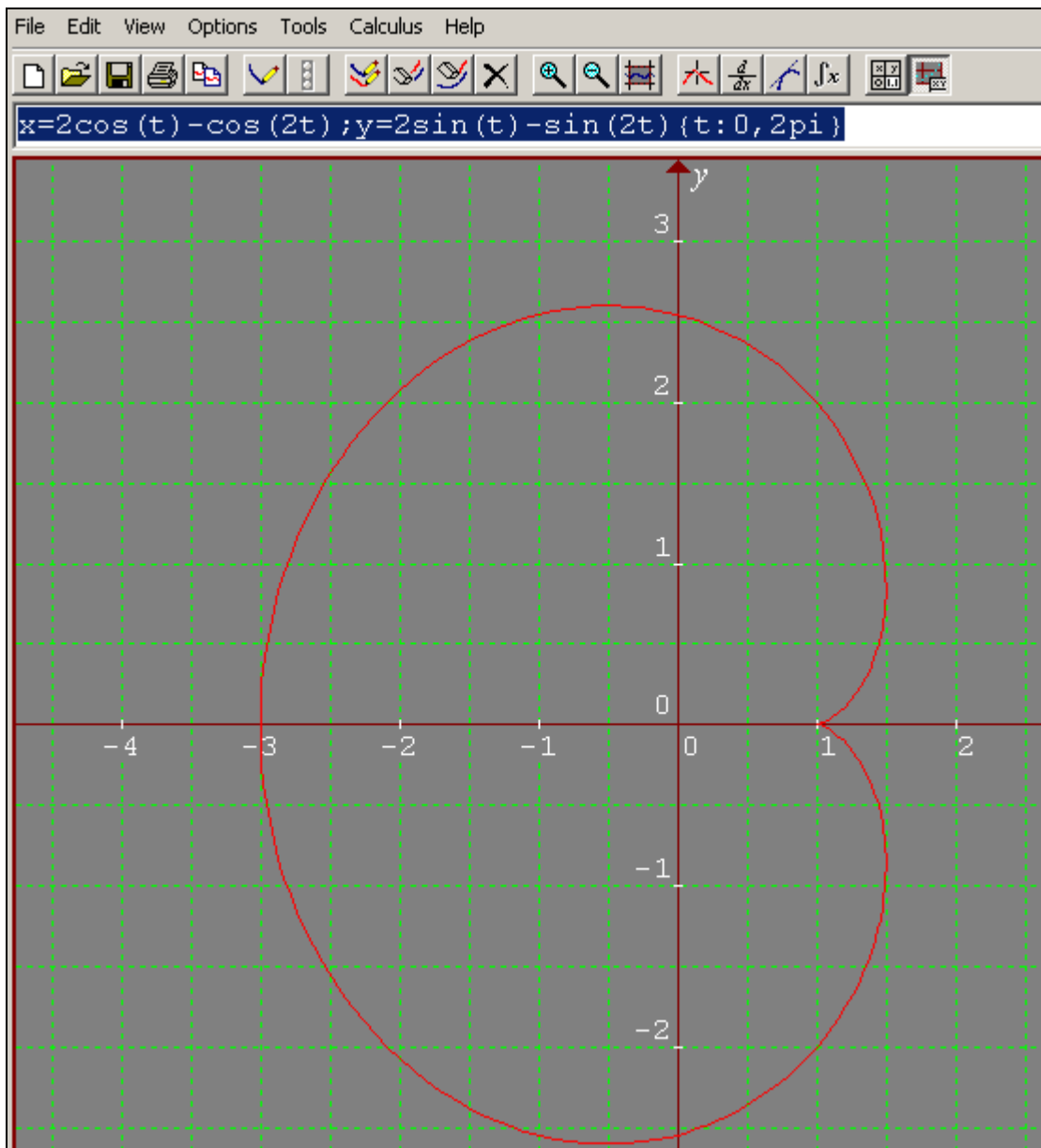
F1 Tools	F2 Setup	F3 Table	F4 Solver	F5 Draw	F6 Calc	F7 Help
t	xt1	yt1				
0.	1.	0.				
.7854	1.4142	.41421				
1.5708	1.	2.				
2.3562	-1.414	2.4142				
3.1416	-3.	...				
t=0.						

MAIN RAD AUTO PAR

Forløbet kan aflæses i TABLE.

Graphmatica:

Vektorfunktionen indtastes med grænser som vist nedenfor.



Mathcad:

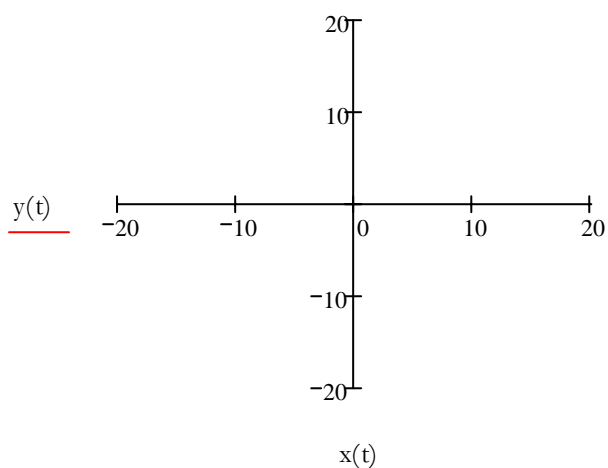
ANIMATION AF VEKTORFUNKTION

$$x(t) := 2 \cdot \cos(t) - \cos(2t)$$

$$y(t) := 2 \cdot \sin(t) - \sin(2t)$$

$$t_0 := \text{FRAME}$$

$$t := 0, 0.1.. \frac{\text{FRAME}}{10}$$



Ved animation vælges i menuen
Tools, Animation, Record.
"Grænser" sættes
og området der skal animeres
markeres.

Vælg: Tools, Animation, Record, Indstil From To og At.

The screenshot shows the Mathcad interface with a graph of a vector function $y(t)$ versus $x(t)$. The graph has axes ranging from -20 to 20. A dialog box titled "Record Animation" is open, showing the following settings:

- For FRAME
- From: 0
- To: 100
- At: 10
- Frames/Sec

The dialog box also contains buttons for "Animate", "Cancel", "Save As...", and "Options...". A text box at the bottom of the dialog box reads: "Select an area of your worksheet whose contents are based on the FRAME variable, enter starting and ending FRAME values, and choose Animate."

Marker området der skal "animeres":

The screenshot shows the same Mathcad interface as above, but with a dashed rectangular box highlighting the graph area. The "Record Animation" dialog box is still open, showing the same settings as in the previous screenshot.

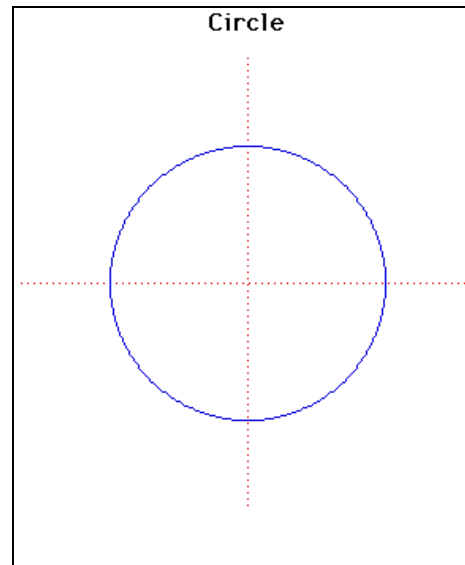
Animationen dannes:

The screenshot shows the Mathcad interface with two dialog boxes. The 'Play Animation' dialog is in the foreground, showing a coordinate system with axes labeled $x(t)$ and $y(t)$. The axes range from -20 to 20. A red dot is positioned at the origin (0,0). Below the graph is a play button and a slider. The 'Record Animation' dialog is also visible, showing settings for 'For FRAME': From: 0, To: 100, At: 10, Frames/Sec. It includes a preview window showing the same coordinate system with a red dot at the origin and a 'FRAME= 100' label. Buttons for 'Animate', 'Cancel', 'Save As...', and 'Options...' are present.

Afspil animationen:

The screenshot shows the Mathcad interface with two dialog boxes. The 'Play Animation' dialog is in the foreground, showing a coordinate system with axes labeled $x(t)$ and $y(t)$. The axes range from -5 to 5. A red closed curve is plotted. Below the graph is a play button and a slider. The 'Record Animation' dialog is also visible, showing settings for 'For FRAME': From: 0, To: 100, At: 10, Frames/Sec. It includes a preview window showing the same coordinate system with a red closed curve and a 'FRAME= 100' label. Buttons for 'Animate', 'Cancel', 'Save As...', and 'Options...' are present.

Parameterkurver/Banekurver



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + a \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Mathcad - [Animation%20af%20vektorfunktion%202001[1]]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Normal Arial

ANIMATION AF VEKTORFUNKTION

$$x(t) := 2 + 2 \cos(t)$$

$$y(t) := 3 + 2 \sin(t)$$

$$t_0 := \text{FRAME}$$

$$t := 0, 0.1 \dots \frac{\text{FRAME}}{10}$$

Play Animation

Record Animation

For FRAME

From:

To:

At:

Frames/Sec

FRAME = 100

Buttons: Animate, Cancel, Save As..., Options...

Select an area of your worksheet whose contents are based on the FRAME variable, enter starting and ending FRAME values, and choose Animate.