Det skrå kast — Hvor langt flyver projektilet ?

Peter Snoer Jensen

H.C. Ørsted Gymnasiet, Frederikssberg
Stæhr Johansens Vej 7, 2000 Frederiksberg

1. Indledning

Dette 3 timers forløb har til formål at undersøge den maksimale rækkevidde og optimale affyringsvinkel for et skråt kast, når affyringen ikke foregår i samme niveau som målet befinder sig i.

Det er meget vanskeligt at løse analytisk, men meget nemmere at løse ved at skrive et program som finder rækkevidden for mange forskellige affyringsvinkler.

Det er altså et godt eksempel på at programmering kan være nyttigt.

2. Teori

Vi forestiller os et skråt kast med udgangshastighed v_0, udgangsvinkel θ, og startposition (x_0, y_0) i et tyngdefelt med tyngdeacceleration g. Positionen som funktion af tiden kan beskrives som:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\theta) \cdot t + x_0 \\ -0.5gt^2 + v_0 \sin(\theta) \cdot t + y_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Differentierer vi positionen som funktion af tiden får vi hastigheden som funktion af tiden:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\theta) \\ -gt + v_0 \sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Differentierer vi hastigheden som funktion af tiden får vi accelerationen som funktion af tiden:

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{3}$$

Vi sætter jordniveauet til at være $y = 0$.

3. Rækkevidde når projektilet affyres i samme niveau som det skal lande

I dette tilfælde sætter vi $y_0 = 0$ og $x_0 = 0$. I dette tilfælde udnytter man at flyvetiden er den dobbelte af den som bruges til at nå toppunktet for parablen. I parablens toppunkt er $v_y = 0$, dvs. $t = v_0 \sin\theta/g$. Indsættes to gange denne værdi i udtrykket for x fås

$$x = v_0 \cos(\theta) \cdot 2v_0 \sin(\theta)/g = v_0^2 \sin(2\theta)/g. \tag{4}$$

Her har vi udnyttet dobbelt vinkel formlen $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

Det ses at projektilet flyver længst, når $2\theta = 90°$, dvs. når $\theta = 45°$. Rækkevidden er

$$x_{\max} = v_0^2/g. \tag{5}$$

4. Rækkevidde når projektilet ikke affyres i samme niveau som det skal lande

I dette tilfælde er problemet mere kompliceret, for der er ikke nogen symmetri omkring parablens toppunkt. Der gælder at $y_0 \neq 0$. For at finde rækkevidden af skuddet ved en affyringsvinkel θ er man nødt til at

I løse 2. gradsligningen $y(t) = 0$. Der kan være 0, 1 eller 2 løsninger.

II indsætte de(n) funde tid(er) i udtrykket for $x(t)$ for at få de x-koordinater hvor projektilet skærer x-aksen.

5. Opgave

I skal

I skrive et program, som finder den vinkel, hvor rækkevidden er størst. I kan vælge at tage udgangspunkt i et ufærdigt NetLogo program eller I kan skrive et program i et sprog efter eget valg. Programmet skal acceptere x_0, y_0, v_0 og g som parametre. Ved hjælp af en løkke som løber over θ fra 0° til 90° i skridt på θ_{step} skal I udregne de mulige rækkevidder for skuddet og finde den største værdi $x_{\max}$ og den tilhørende vinkel θ. Det er acceptabelt at bruge resultaterne fra programmet til at tegne en graf, med rækkevidden som en funktion af affyringsvinklen hvor man kan aflæse maksimumsværdien. Hvis der er to løsninger til 2.gradsligningen, så bør begge løsninger indtegnes.

II Afprøve programmet i tilfældet $y_0 = 0$ hvor vi har en formel for rækkevidden. Passer det at den optimale vinkel er 45°?

III Afprøve programmet for postive og negative værdier af y_0 og tolke resultaterne. Bliver den optimale vinkel større eller mindre end 45° afhængigt af fortegnet for y_0?

IV Dokumentere arbejdet ved at aflevere programmet og eksempler på kørsel i de tre tilfælde med kommentarer til resultatet.