

Computational thinking i matematik – differentiaalligninger

ALLAN JENSEN, Silkeborg Gymnasium

Denne artikel er én af fem artikler i dette nummer, der behandler emnet Computational Thinking (CT) i gymnasiefag. Denne artikel viser et eksempel på, hvordan CT frugtbart kan inddrages i et forløb om modellering med differentiaalligninger på matematik A-niveau. Forløbet blev udviklet under DASG-kurset *Computational Thinking i Matematik og Naturfag* i 2018 og er beregnet til at kunne afvikles på 4 – 5 moduler af 75 minutters varighed. Forløbet er afprøvet i en 3.g klasse i efteråret 2018 på Silkeborg Gymnasium, og forløbet opfyldte følgende matematikfaglige pinde:

- Stokastisk simulering¹⁾
- Modellering med eksponentiel differentiaalligning (og koblede differentiaalligninger)
- Modeltjek
- Analytisk løsning af differentiaalligninger

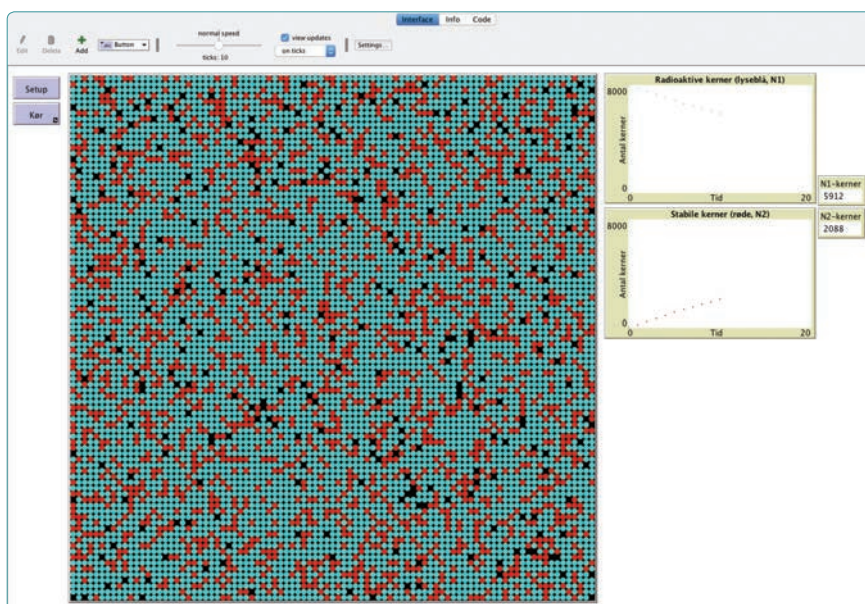
Materialet fra forløbet kan findes på library.ct-denmark.org/lmfk.

Hvordan adskiller forløbet sig fra, hvad jeg plejer at gøre?

Et typisk forløb om differentiaalligningsmodeller kan omfatte modellering af radioaktivitet. Udgangspunktet, fra fysik, er som bekendt en bestemt type af radioaktive kerner, der inden for en given tidsenhed henfalder med en fast sandsynlighed. Alt efter temperament og tidspres og klassens abstraktionsniveau har jeg tidligere introduceret emnet *deduktivt* eller *simulativt*.

- Med *deduktivt* mener jeg rene ”skrivebordsovervejelser” på ”populations-niveau” over, hvorledes dobbelt

¹⁾ Bekendtgørelsen (2017) for matematik A-niveau (stx) nævner som noget nyt eksplicit under 2.1. Faglige mål at eleverne skal kunne foretage ”sandsynlighedsteoretiske ... simuleringer” samt anvende ”funktioner og afledede funktioner i opstilling af matematiske modeller..., foretage simuleringer samt fremskrivninger og forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller”.



Figur 1
Interface i NetLogo-modellen ”Radioaktivt henfald”.

så mange kerner vil føre til dobbelt så mange henfald pr. tidsenhed, hvorfor proportionaliteten $N' = k \cdot N$ udledes (som man så kan løse analytisk/deduktivt).

- Med *simulativt* mener jeg fx inddragelse af matematikfaggruppens kasse med 1000 terninger, hvor ud fra man simulerer data (hver 6'er betyder henfald og den pågældende terning fjernes fra populationen) og fx ved regression fastslår sammenhængen $N' = k \cdot N$ (som man så kan løse analytisk/deduktivt).

Det simulative element har dog altid i min traditionelle undervisning haft en motiverende rolle i starten af forløbet om radioaktivitet, hvorefter det deduktive element tager kraftigt over.

Med inddragelse af henfaldssimuleringer i NetLogo har jeg imidlertid oplevet, at det simulative og deduktive element i langt højere grad får lov at køre (gensidigt befrugtende og motiverende) parløb hele vejen fra start til slut – fra modeller for enkelthenfald (datterkernerne er stabile) til modeller for henfaldskæder (dat-

terkerner er også radioaktive og henfalder yderligere), hvilket giver anledning til koblede differentiaalligninger, der både kan løses analytisk og ved simulering.

Hvad er det eleverne konkret gør?

NetLogo-modellen ”Radioaktivt henfald”, som eleverne skal anvende (og modificere) i forløbet, er meget simpel. Programmet opretter som udgangspunkt 8000 (lyseblå) radioaktive kerner, som, når man kører programmet, henfalder til (inaktive) røde kerner. Hver population af kerner (radioaktive såvel som stabile kerner) har i interfacet et grafplot, der løbende viser, hvor mange der er. Se Figur 1.

En ikke uvæsentlig kodeøvelse for eleverne (og deres ejerskabsfølelse for programmet) kan være at ændre farve og udseende på de 2 typer af kerner.

Men den centrale faglige kode, eleverne skal forholde sig til for at forstå og modificere programmet, er fastsættelsen af henfaldssandsynligheden ”Sandsynlighed-for-henfald-N1” samt proceduren ”kør henfald1”. Se Figur 2.

```

to setup
  clear-all
  set-default-shape N1s "circle"
  set-default-shape N2s "circle"
  set Sandsynlighed-for-henfald-N1 3
  set Startantal-N1 8000
  create-N1s Startantal-N1 [
    set color cyan
    move-to one-of patches with [ not any? Turtles-here ]
  ]
  reset-ticks
end

to go
  if not any? N1s [ stop ]
  kør-henfald1
  tick
end

to kør-henfald1
  ask N1s [
    if random-float 100.0 < Sandsynlighed-for-henfald-N1 [
      set breed N2s
      set color red
    ]
  ]
end

```

Figur 2
Udsnit af koden i NetLogo-modellen "Radioaktivt henfald".

Det matematikfagligt interessante for eleverne er nu i Excel (via dataeksport fra NetLogo) at undersøge (modeltjek), hvorvidt de simulerede data for N1-kerne rent faktisk opfylder den eksponentielle differentialligning $N_1' = k \cdot N_1$, som så kan løses analytisk med eller uden desolve i CAS.

Næste skridt for eleverne er nu det lidt mere kodeudfordrende at modificere koden til at kunne simulere dobbelthenfald med radioaktive kerner N_1 og N_2 og stabile N_3 , hvorved de simulerede grafplot for N_1 , N_2 og N_3 vises. Se elevløsningen i Figur 3 eller Figur 4 på side 27.

Man er i situationen med dobbelthenfald i den heldige situation, at man faktisk stadig kan løse problemet analytisk (via opstilling af koblede differentialligninger). Eleverne løser problemet analytisk ved desolve i CAS og sammenholder graferne for de analytiske løsninger med de simulerede grafer fra deres egen NetLogo-model.

Eleverne kan med fordel inviteres med til at reflektere over, at der er grænser for, hvor komplicerede modeller der kan udledes analytiske løsninger for. Derimod er der med få kodeændringer uanede mu-

ligheder for at ændre på betingelserne/antagelserne, der gælder for simuleringen i NetLogo-modellen.

Hvorfor simulering i NetLogo frem for andre programmer?

Man kan også lave stokastisk simulering i allerede kendte programmer som Excel eller TInspire, så hvorfor introducere et nyt program? Den helt store force ved NetLogo er, at det er agentbaseret. Dvs. at man i interfacet rent faktisk kan se det fænomen (på mikroniveau), man undersøger og ikke kun talrækker og grafrepræsentationer af fænomenet. Det at kunne se fænomenet "direkte" virker meget motiverende og realistisk på eleverne (og lærere). Mange af elevernes umiddelbare ideer og hypoteser springer ud af, hvordan fænomenet fremstår (agentbaseret) frem for hardcore analyse af talrækker og grafer.

Opsummering angående agentbaserede modeller i NetLogo

Det er motiverende for eleverne med den visuelle repræsentation af mikroniveau, der ligger til grund for makrobeskrivelserne i form af grafer, tabeller og differentialligninger, der i højere grad beskriver fænomenet på populationsniveau

Hvad opnår eleverne i et videre perspektiv?

Man kan sige, at eleverne, ud over det matematikfaglige, som sidegevinst også får en basal forståelse for kodning og algoritmer og generelt får sænket frygten/barrieren for at "fuske" med kode, hvilket i sig selv kan være værdifuldt i senere studie- og arbejdsliv.

Men endnu vigtigere får eleverne med mestringsen af og den løbende kodetilpasning af simuleringen i NetLogo udvidet deres aktive repertoire af løsningsstrategier i faget matematik!

Og det er netop fordi simulering og deduktion danner parløb hele vejen i radioaktivitetsforløbet og i højere grad optræder som ligeværdige løsningsstrategier (ja faktisk rækker simulative strategier teoretisk og i praksis oftest længere end deduktive og analytiske løsningsstrategier, når problemstillingerne bliver tilpas komplekse og beviseligt ikke kan løses analytisk).

Potentielt kan eleverne tage mestringsen af både de deduktive/analytiske og de simulative metoder (og også NetLogo) med sig ind i studieretningsprojektet og videnskabsteoretisk forholde sig

til de forskellige metoders styrker og svagheder.

Dette kan foregå i en enkeltfaglig matematik–SRP, hvor der netop er krav om inddragelse af flere metoder. Alternativt kan SRP foregå i samarbejde med et af de utallige fag, biologi, psykologi, sociologi, filosofi, hvortil der allerede eksisterer NetLogo–modeller i modelbiblioteket.

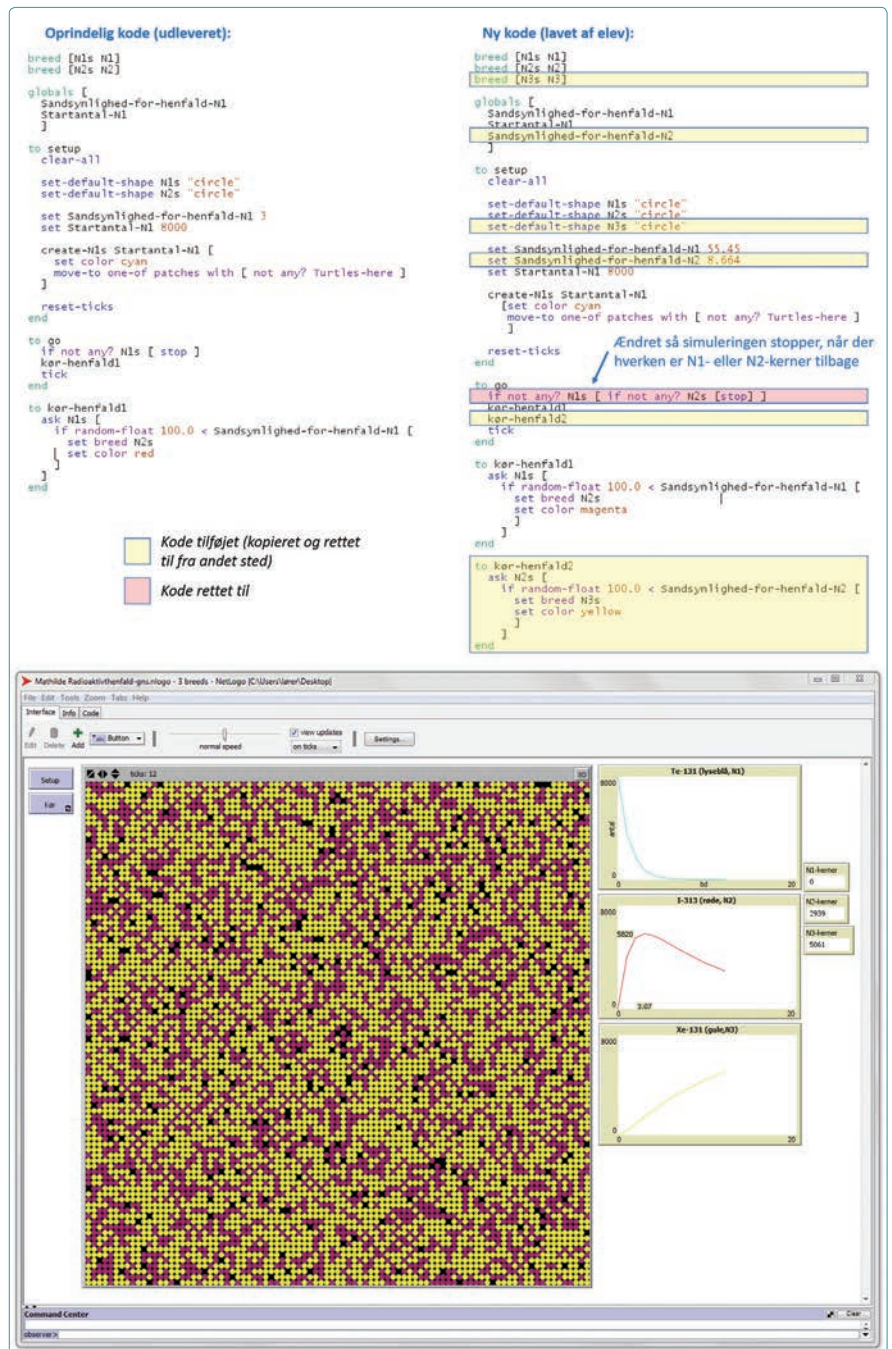
Bemærk

Det er altid en god idé, videnskabssteoretisk, at reflektere lidt dybere over helt præcist, hvad det er, man bruger en simulering til?

- Simulerer man et allerede meget velkendt og meget velundersøgt fænomen, fx fordi det ville være for dyrt/farligt/tidsforbrugende for eleverne at sprænge en konkret atombombe eller starte en konkret skovbrand i et område med brandbælter, men alligevel ønsker at lade eleverne simulativt eksperimentere og udlede sig nogle forholdsregler og principper, man kan tage sig, inden man måske står overfor sprængningen af atombomben eller skovbranden i virkeligheden.
- Simulerer man et fænomen for at teste, om de bagvedliggende antagelser, som videnskaben pt. gør sig om fænomenet, rent faktisk holder? Altså simulerer man for at udlede observerbare konsekvenser af den videnskabelige model og for at teste, om de udledbare/simulerbare konsekvenser rent faktisk stemmer overens med målinger af virkeligheden? I dette tilfælde er man ovre i en hypotetisk–deduktiv eller måske nærmere en hypotetisk–simulativ metode, der i sidste ende kan forkaste eller korrigerer den bagvedliggende videnskabelige model og være med til at drive den videnskabelige erkendelse fremad.

Simulering med binomialfordelinger

Hvis man er interesseret i at bruge NetLogo og CT til mere rendyrket stokastisk simulering i forbindelse med binomialfordelingen kan det anbefales at se på følgen-



Figur 3

Et eksempel på hvordan en løsning kan se ud efter, at eleven har kodet dobbelthenfaldet.

de forløb, der også blev udviklet under DASG–kurset *Computational Thinking i Matematik og Naturfag* i 2018:

- library.ct-denmark.org/simulering-af-binomialforsog
- library.ct-denmark.org/binomialfordelinger-i-netlogo