

Vektorfunktioner vha. CAS



Forord

Vi skal i de kommende uger arbejde med emnet Vektorfunktioner ved:

- 1) at I selv arbejder med siderne 3 – 10 som en opstart. Siderne baserer sig på CAS-programmet TI-Nspire. Der er dog i Appendix A introduktioner til, hvordan man også kan bruge Mathcad, Graphmatica og TI89.
- 2) at lærebogen bruges i samarbejde med læreren (MAT A – HTX. Kap. 2 s. 79 – 107 eller MAT A3 – STX. Kap. A2 – Parameterkurver s. 177 – 203).
- 3) at der arbejdes i grupper med siderne 12 – 18.

Indholdsfortegnelse

Forord.....	2
Vektorfunktioner.....	3
TI-Nspire.....	4
Eksperimenter vha. CAS – 1.....	8
Lærebogen.....	11
Længden af en banekurve.....	12
Arealer begrænset af banekurver.....	14
Krumning af parameterkurver.....	16
Eksperimenter vha. CAS – 2.....	18
Appendix A.....	19

Vektorfunktioner

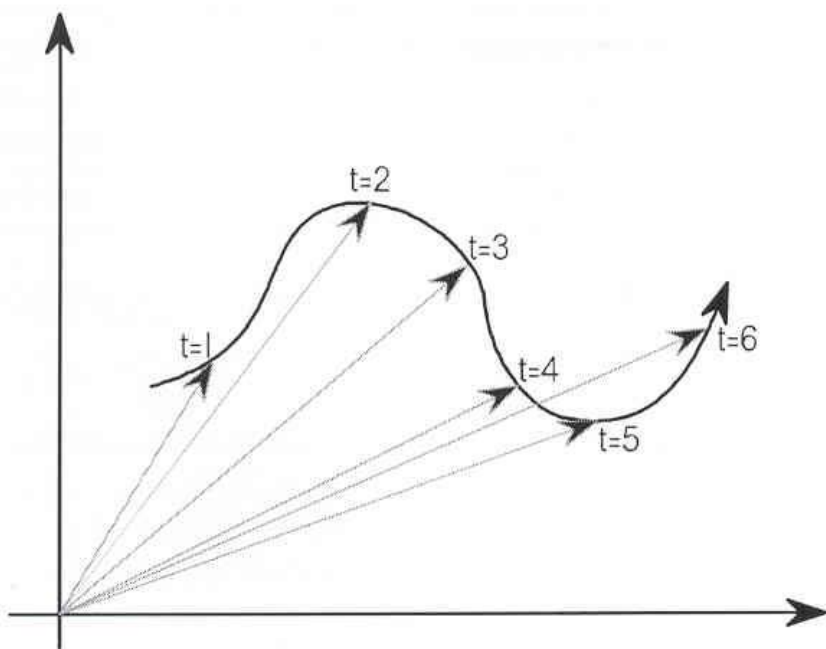
Generelt om vektorfunktioner

Definition:

Ved en vektorfunktion forstås en funktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

hvor $x(t)$ og $y(t)$ er reelle funktioner. Disse kaldes koordinatfunktioner. Vektorfunktionens definitionsmængde er reelle tal, og værdimængden er vektorer.

Grafen for en vektorfunktion kaldes en banekurve



Eksempel på en banekurve

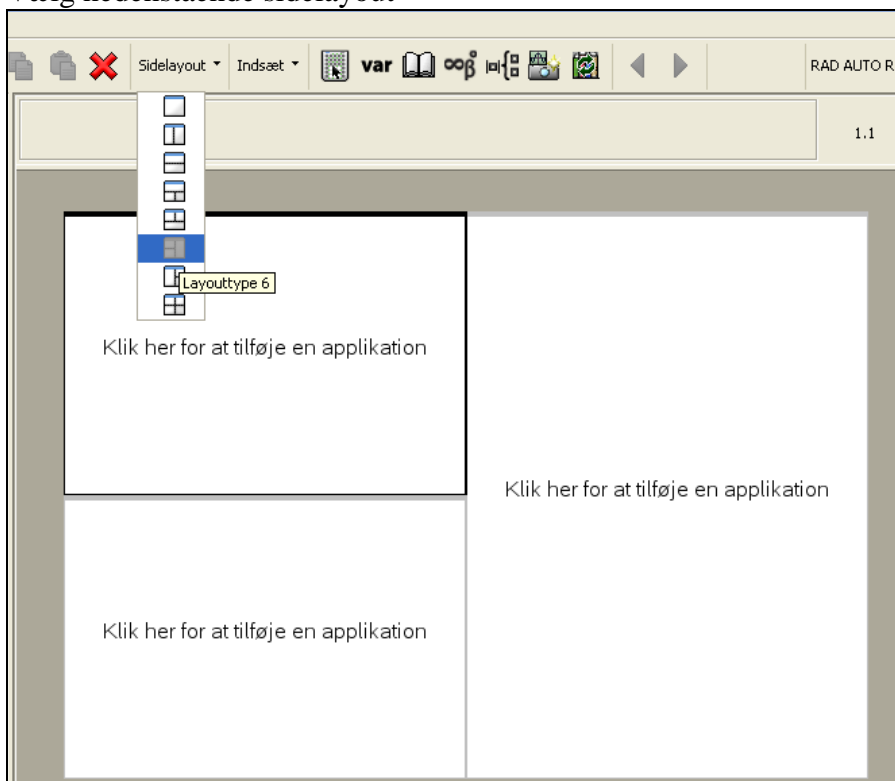
Et eksempel på en parameterfremstilling for en ret linje:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

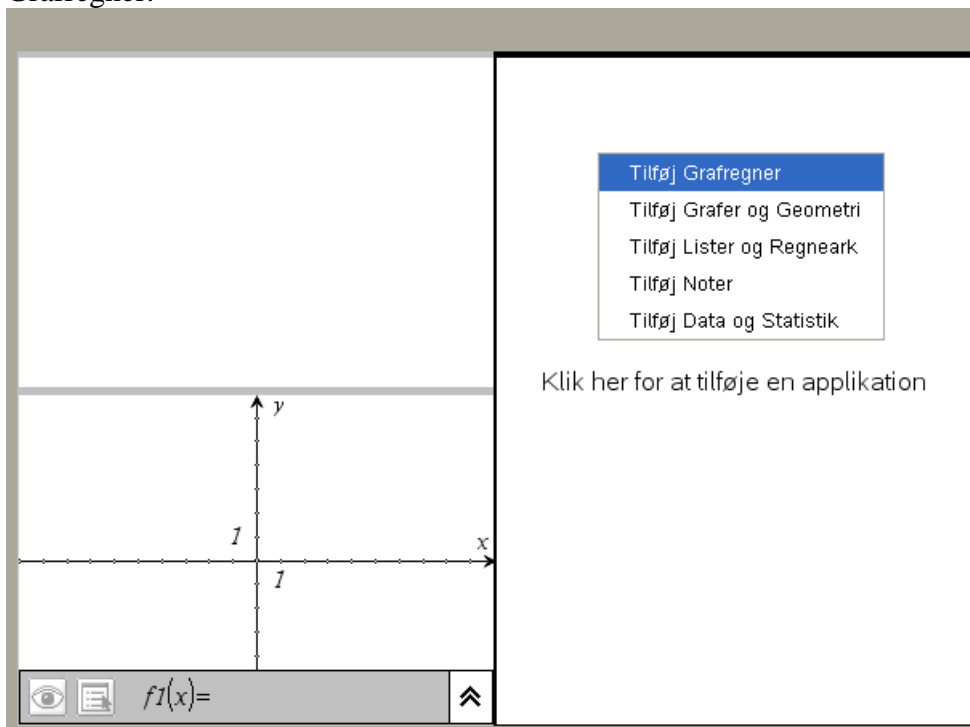
TI-Nspire

I dette afsnit er kort beskrevet, hvordan man arbejder med vektorfunktioner i TI-Nspire.

Vælg nedenstående sidelayout

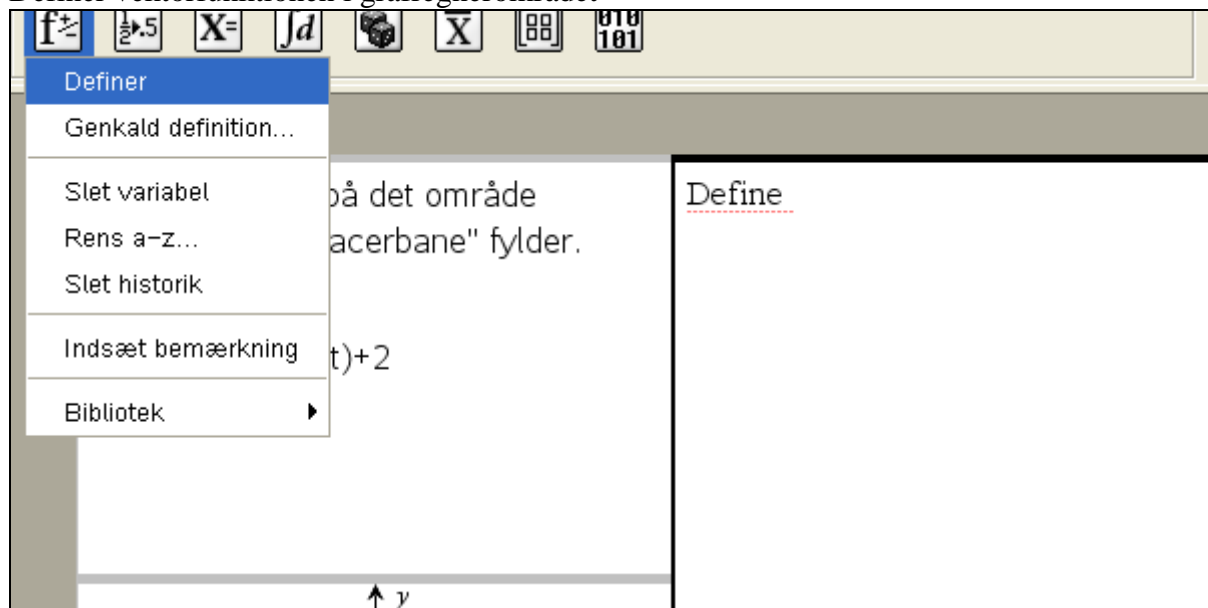



Tilføj øverst i venstre kolonne Noter, i nederste venstre kolonne Grafer og Geometri og til højre Grafregner.

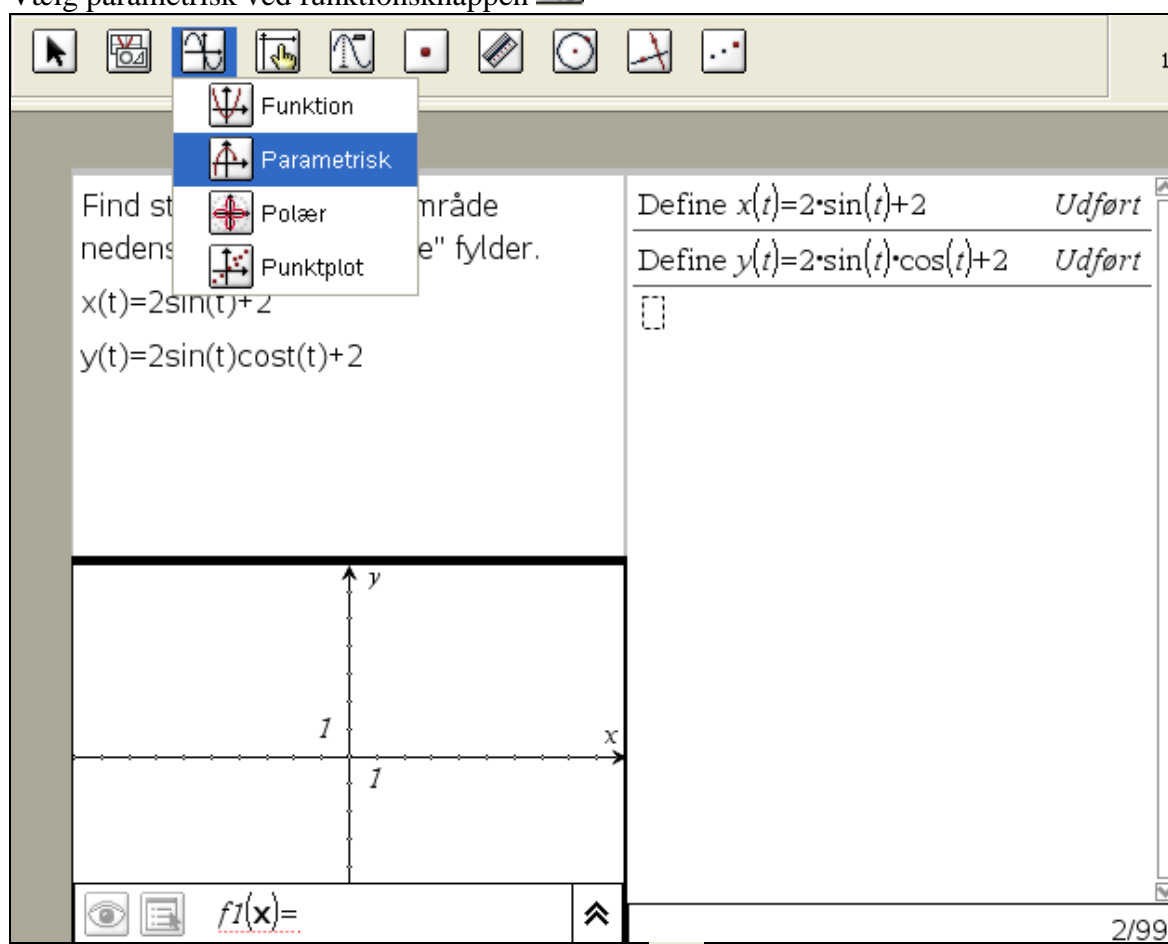



Tekst (opgaveformulering/dokumentation m.m.) kan indskrives i note-feltet.

Definer vektorfunktionen i grafregnerområdet



Vælg parametriske ved funktionsknappen 



Lommeregner tastaturet tændes i øverste linje ved . Indtast den definerede vektorfunktion.

The screenshot shows the TI-Nspire CAS interface. The workspace contains the following text:

Find størrelsen på det område
nedenstående "racerbane" fylder.
 $x(t) = 2\sin(t) + 2$
 $y(t) = 2\sin(t)\cos(t) + 2$

Below the text is a coordinate system with x and y axes. The origin is marked with '1' on both axes. A small box at the bottom left of the graph contains the following code:

```

x1(t)=x(t)
y1(t)=y(t)
0≤t≤4π tstep=0.13

```

On the right side of the workspace, there is a list of definitions:

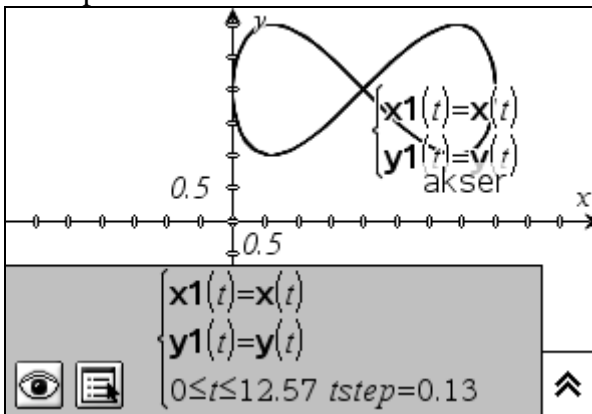
```

Define x(t)=2·sin(t)+2    Udført
Define y(t)=2·sin(t)·cos(t)+2    Udført

```

A virtual keyboard window titled "Tastatur" is overlaid on the right side of the screen, showing various mathematical and standard keyboard functions.

Ændr på akserne ved at trække i dem med "hånd"-musen!!



Der "beregnes" på funktionen!

Find størrelsen på det område nedenstående "racerbane" fylder.

Define $x(t) = 2 \cdot \sin(t) + 2$ *Udført*
 Define $y(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + 2$ *Udført*

$\frac{d}{dt}(y(t)), t$
 $\frac{(1+1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n1 - 1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n2 + 3) \cdot \pi}{4}$

$t = \frac{(8 \cdot n1 + 1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n1 - 1) \cdot \pi}{4}$ or $t = \frac{(8 \cdot n2 + 3) \cdot \pi}{4}$
 $t = 6.28319 \cdot (n1 + 0.125)$ or $t = 6.28319 \cdot (n1 - 0.125)$

$\text{solve}\left(0 = \frac{d}{dt}(x(t)), t\right)$ $t = \frac{(2 \cdot n3 - 1) \cdot \pi}{2}$
 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 2

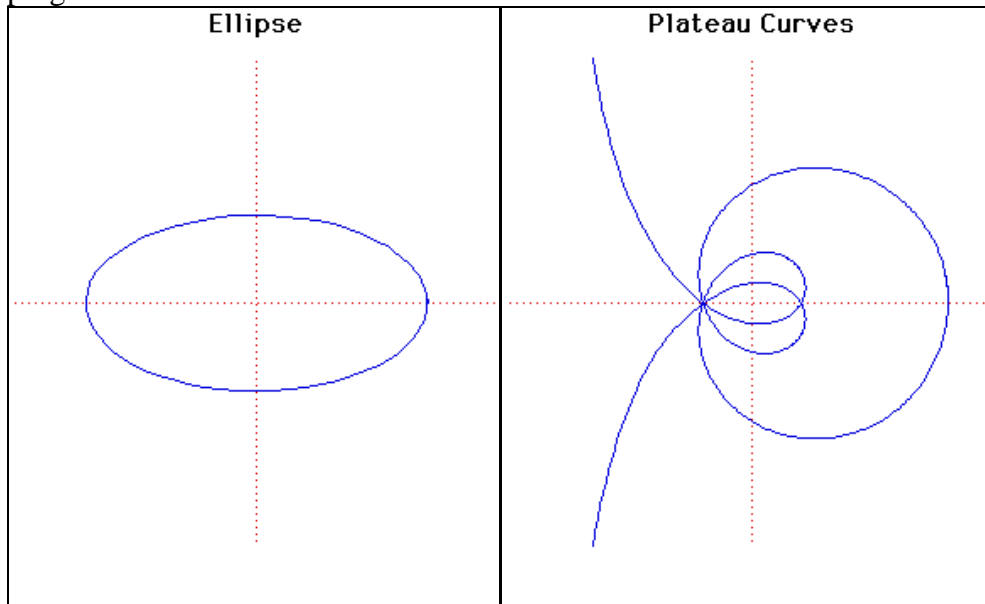
$x1(t) = x(t)$
 $y1(t) = y(t)$
 $0 \leq t \leq 12.57$ *tstep* =

6/99

Eksperimenter vha. CAS – 1

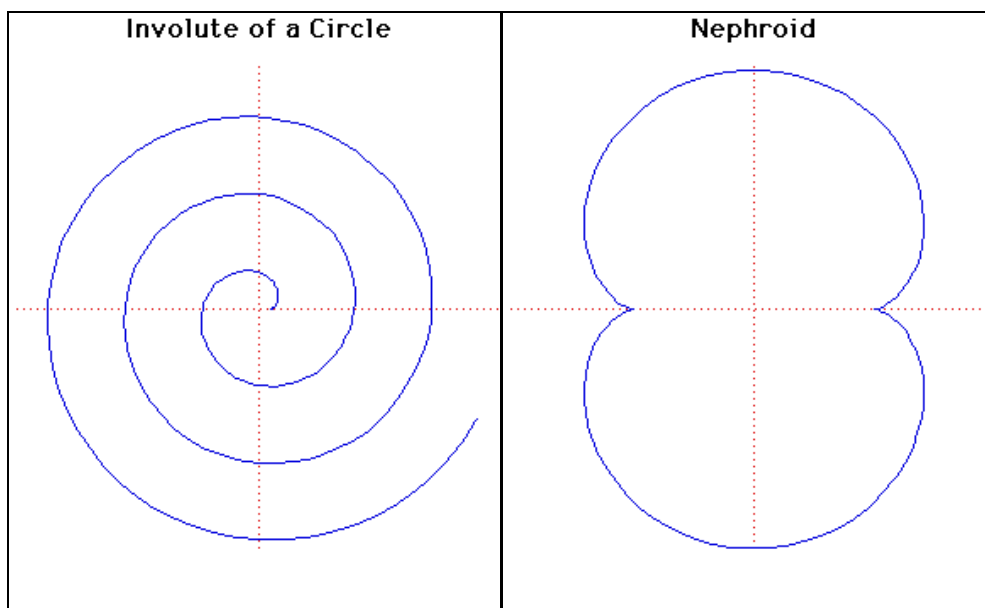
Opgave 1: Lav din egen skabelon til en animation vha. TINspire, TI89 eller Mathcad.

Opgave 2: Tegn/lav en animation af nogle af nedenstående vektorfunktioner vha. dit CAS-program.



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a \cdot \sin((m+n) \cdot t)}{\sin((m-n) \cdot t)} \\ \frac{2a \cdot \sin(mt) \cdot \sin(nt)}{\sin((m-n) \cdot t)} \end{pmatrix}, \text{ hvor } a, m, n \in \mathbb{N}$$



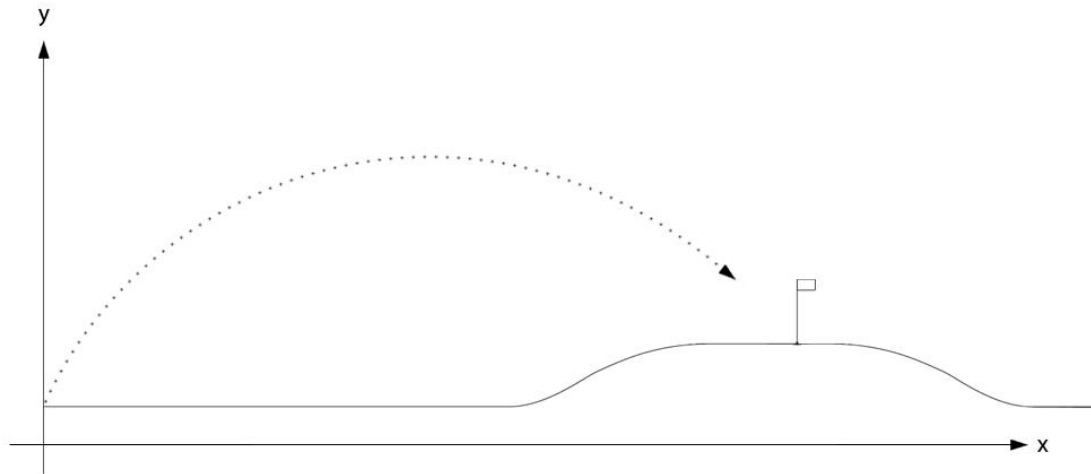
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)) \\ a \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$$

Ps. Involute = spiraldrejet

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot (3 \cos(t) - \cos(3t)) \\ a \cdot (3 \sin(t) - \sin(3t)) \end{pmatrix}$$

Opgave 3:

- a) Tegn/lav animation af en golfbolds vej mod "hole in one".
Fastlæg banens længde, hullets højde over tee-stedet, boldens max-højde m.m. inden du forsøger dig med at animere banekurven. Opskriv vektorfunktionen.
- b) Overvej, hvordan nedslagspunkt, boldens "tid" i luften og boldens max-højde kan bestemmes.



Billede: Tommy Frost

- c) En bestemt dag er der sidevind på 3 m/s på banen.
Brug nedenstående skabelon fra Mathcad til at lave en banekurve i 3D, hvor der tages højde for sidevinden og forudsætninger fra a). $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$\text{curve}(t) := \begin{pmatrix} -0.5t^2 + 9.8t \\ t \\ \frac{-4}{25}t^2 + \frac{40}{25}t \end{pmatrix}$$

a0 := 0
a1 := 1
S := CreateSpace(curve, a0, a1)

S

S

Ved at holde musen nede kan man "trække rundt" med kurven.

Opgave 4: En skitur ned af et bjerg kunne have forskriften $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,66t + 3\cos(8t) \\ -0,452 \cdot t^4 \end{pmatrix}$

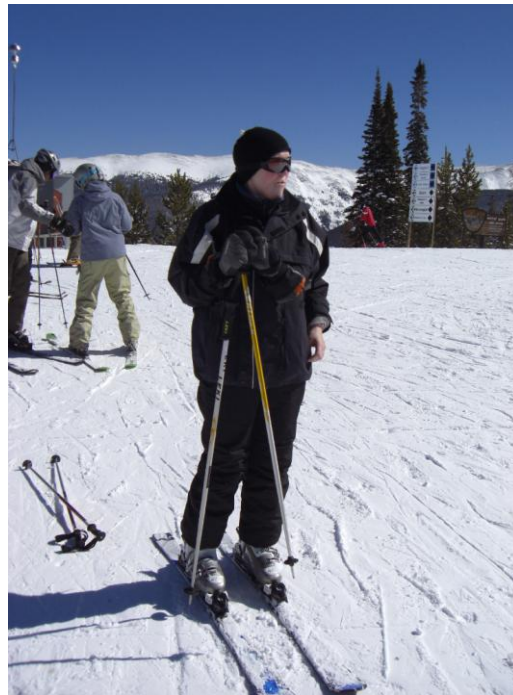
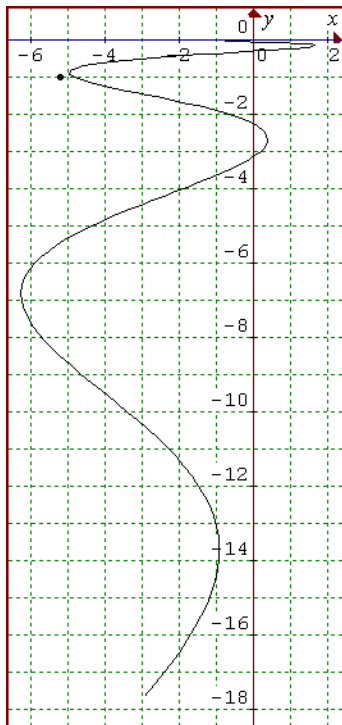
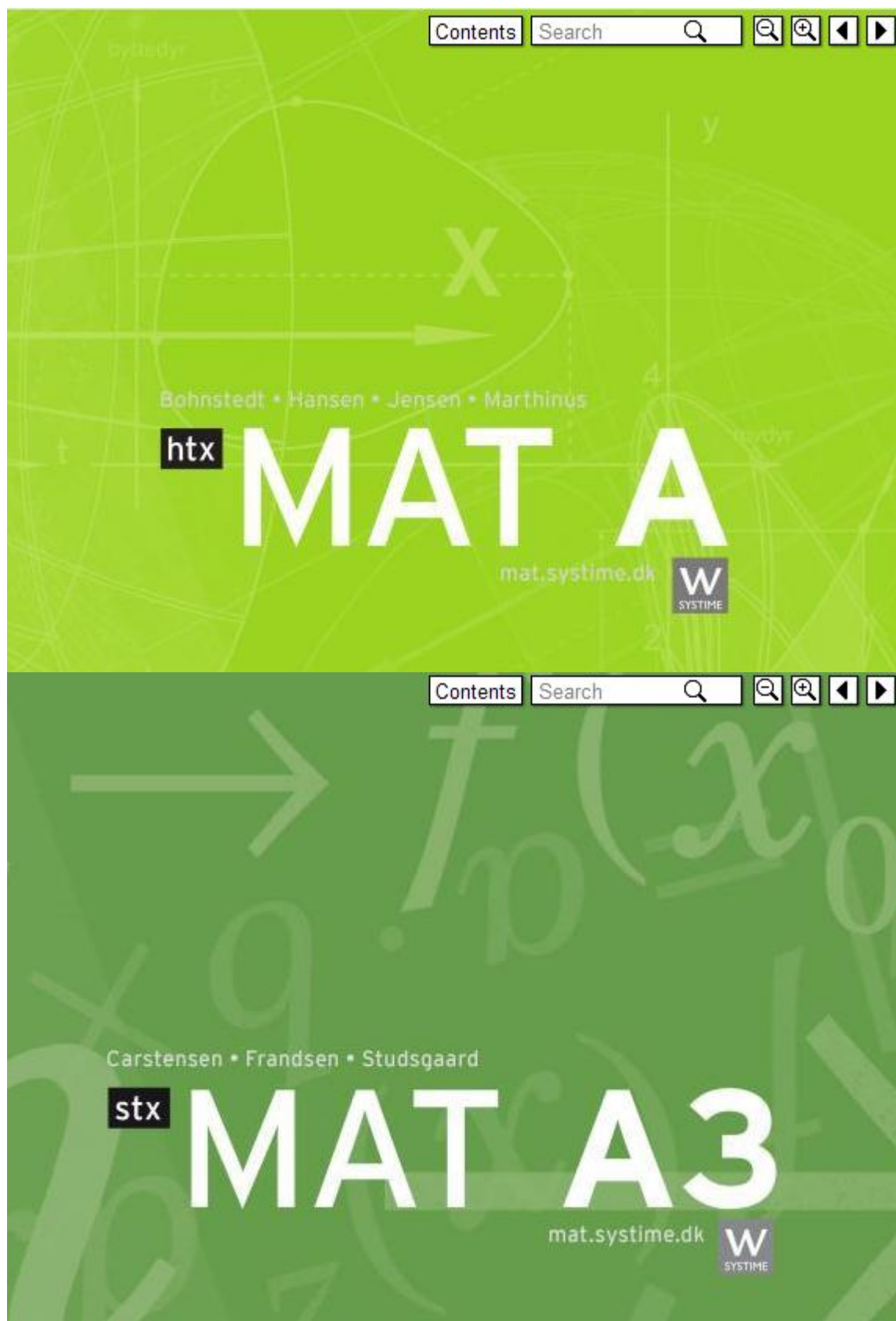


Foto: Peter Hammer Hansen

Forsøg selv at beskrive en tur ned af en skibakke med en vektorfunktion.

Lærebogen

Vi vender os nu mod lærebogen (se forord).



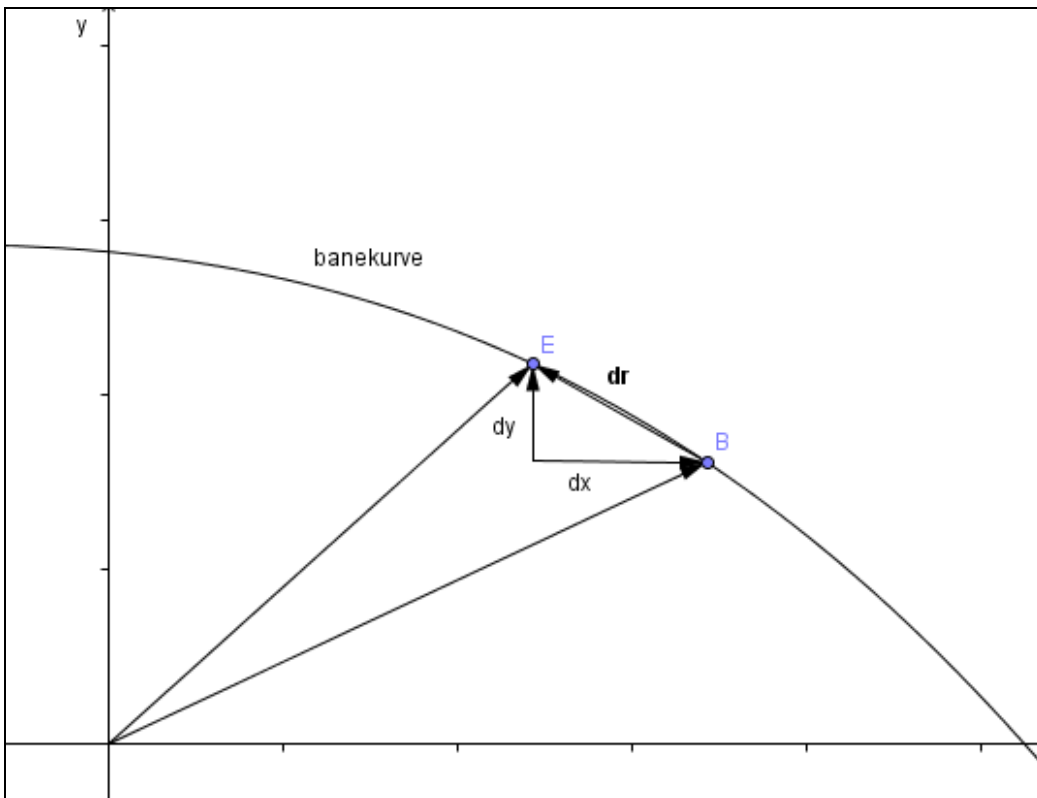
Længden af en banekurve

Sætning 1

Længden L af en banekurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ er givet ved

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\ &= \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt \end{aligned} \quad \text{hvor } t \in [a; b]$$

Bevis:



Kurven er givet ved $\vec{OB} = \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Længden af kurven mellem punkterne B og E kan bestemmes ved at give tiden t en lille tilvækst $dt = \Delta t$, derved får x og y tilvæksterne

$dx = x'(t)dt$ og $dy = y'(t)dt$. Herved får stedvektoren tilvæksten $d\vec{r}$, hvis længde er

$$L_i = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |\vec{v}(t)|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L_i = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt$$

Opgave 5:



I piratland i Legoland kan man få en hvirvlende tur i store sørøverbaljer, hvor det gælder om at holde godt fast. Baljerne bevæger sig cirkulært på en stor plade, herudover drejes 3 baljer sammen på en mindre plade og til sidst kan man selv dreje sin egen balje rundt ved at dreje på et hjul i baljen. Se billedet til venstre. Herved fremkommer en sammensat bevægelse.

Kilde: www.legoland.dk

Den sammensatte bevægelse kan f.eks. beskrives ved.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + 2 \cos(2t) + \cos(4t) \\ 4 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 2 \sin(2t) + \sin(4t) \end{pmatrix} \quad t \in [0; 4\pi]$$

hvor tiden t er i sekunder og $x(t)$ og $y(t)$ er i meter.

- Tegn banekurven for bevægelsen.
- Bestem, hvor langt en gæst bevæger sig i løbet af én omdrejning i piratbaljen.
- Servicemedarbejderen, der styrer sørøverbaljerne, sidder i sit skur i punktet $(9;1)$. Bestem den korteste afstand fra sørøverbaljerne til servicemedarbejderen.

Arealer begrænset af banekurver

Sætning 2 (uden bevis)

Arealet A af det område, der afgrænses af banekurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ og linjerne

OB og OD , hvor $\overline{OB} = \vec{r}(a)$ og $\overline{OD} = \vec{r}(b)$ er givet ved

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_a^b \hat{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_a^b \det(\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) dt \right| \end{aligned}$$

Opgave 6:

En racerbane opbygges som et ottetal ved følgende vektorfunktion:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(t) + 4 \\ 4 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + 4 \end{pmatrix}.$$

- Optegn banekurven.
- Hvor meget plads skal man have for at kunne opstille racerbane?
- Find koordinaterne til kurvens dobbeltpunkt.
- Hvor langt skal bilen køre på en omgang?

Den indvendige del af banen skal males.

- Hvor stort et areal skal males?



Kilde : www.br.dk

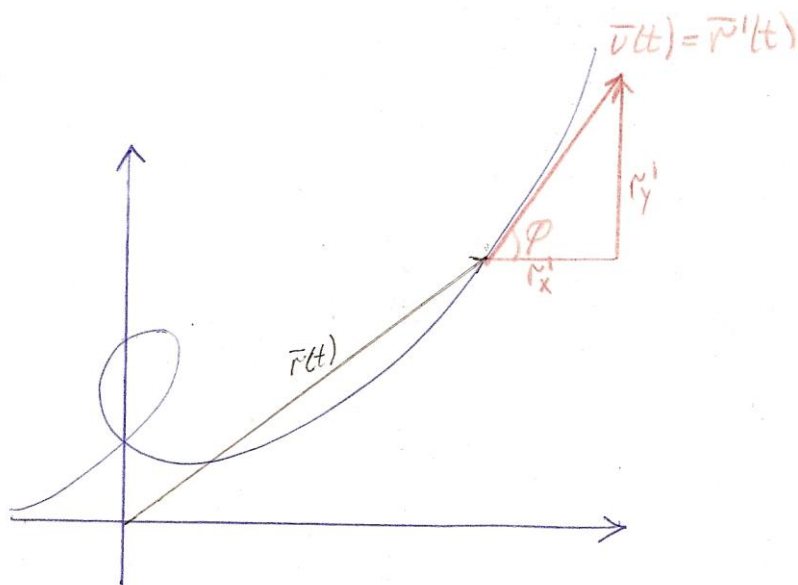
Krumning af parameterkurver

Sætning 3

Krumningen for en kurve med parameterfremstillingen $\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t \in I$ er:

$$\kappa(x) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bevís:



$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad (1)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{r'_y}{r'_x} \Rightarrow \varphi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{r'_y}{r'_x}\right) \text{ En sammensat funktion!}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{r_y'}{r_x'}\right)^2} \left(\text{da } (\tan^{-1})' = \frac{1}{\tan'} = \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi)} \right)$$

$$= \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2}$$

Vi vender tilbage til (1)

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2} \cdot \frac{1}{v}, \text{ hvor } v = \sqrt{(r_x')^2 + (r_y')^2}$$

$$\kappa = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{(r_x')^2 + (r_y')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(r_x')^2 + (r_y')^2}} = \frac{r_y'' \cdot r_x' - r_y' \cdot r_x''}{\left((r_x')^2 + (r_y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad q.e.d$$

Opgave 7: På billedet nedenfor ses en del af en Flexi-trax bane



I et koordinatsystem kan en del af banen tilnærmelsesvis beskrives ved vektorfunktionen.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 300t \\ -5t^3 - 15t^2 + 1000 \end{pmatrix}, \quad t \in [-5; 5]$$

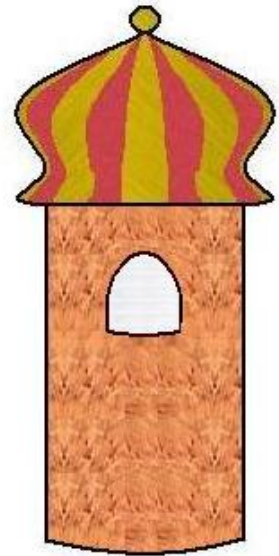
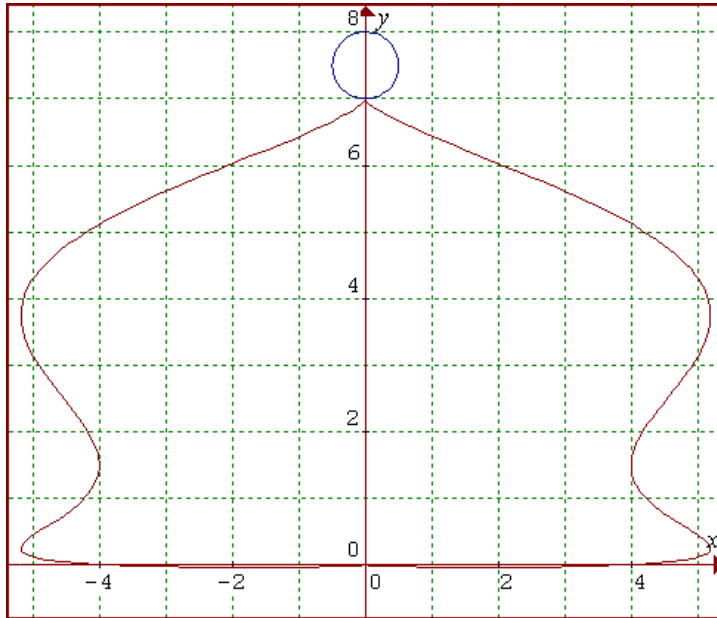
Alle mål er i mm.

- Tegn banekurven
- Bestem krumningen $\kappa(t)$ for $t = 2$.
- Bestem t-værdien, hvor krumningen er hhv. $10^{-5} m^{-1}$ og $-10^{-5} m^{-1}$.

Eksperimenter vha. CAS – 2

Opgave 8: Nedenstående vektorfunktion er afbilledet i et koordinatsystem. Billedet til højre kan evt. have noget med opgaven at gøre!

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) + \sin(5t) \\ -3,5 \cos(t) + \cos(2t) + 3,5 \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi]$$



Ud fra ovenstående oplysninger skal du stille en vektorfunktionsopgave til din nærmeste klassekammerat.

Opgave 9: Ud fra et af nedenstående billeder skal du stille en opgave om vektorfunktioner, der kan stilles til dine klassekammerater i næste aflevering.

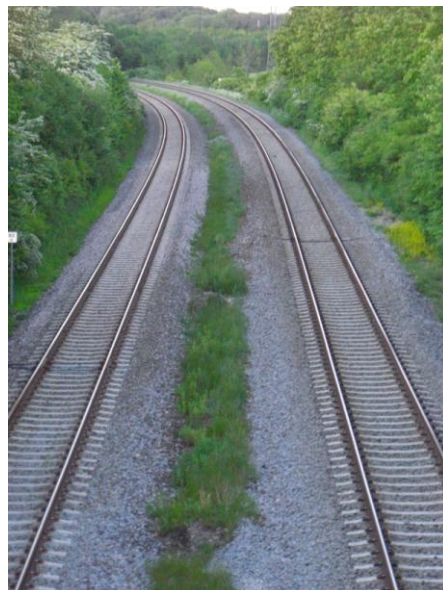
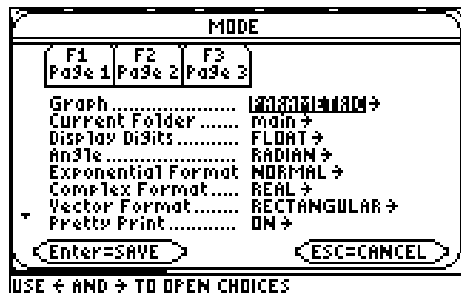


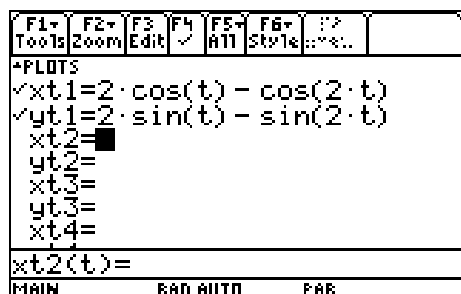
Foto: Marianne Mejlgaard

Appendix A

TI89:



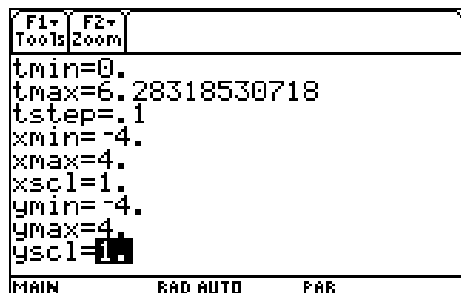
I menuen mode vælges tilstanden Parametric.



Tast Y=

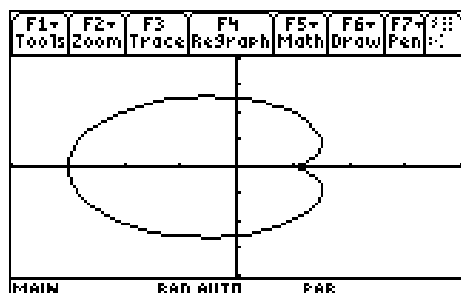
Koordinatfunktioner indtastes.

I dette tilfælde en kardioide.



"Fornuftige" grænser indtastes i WINDOW.

I dette tilfælde forløber $t \in [0; 2\pi]$



GRAPH.

Bemærk forløbet af kurven

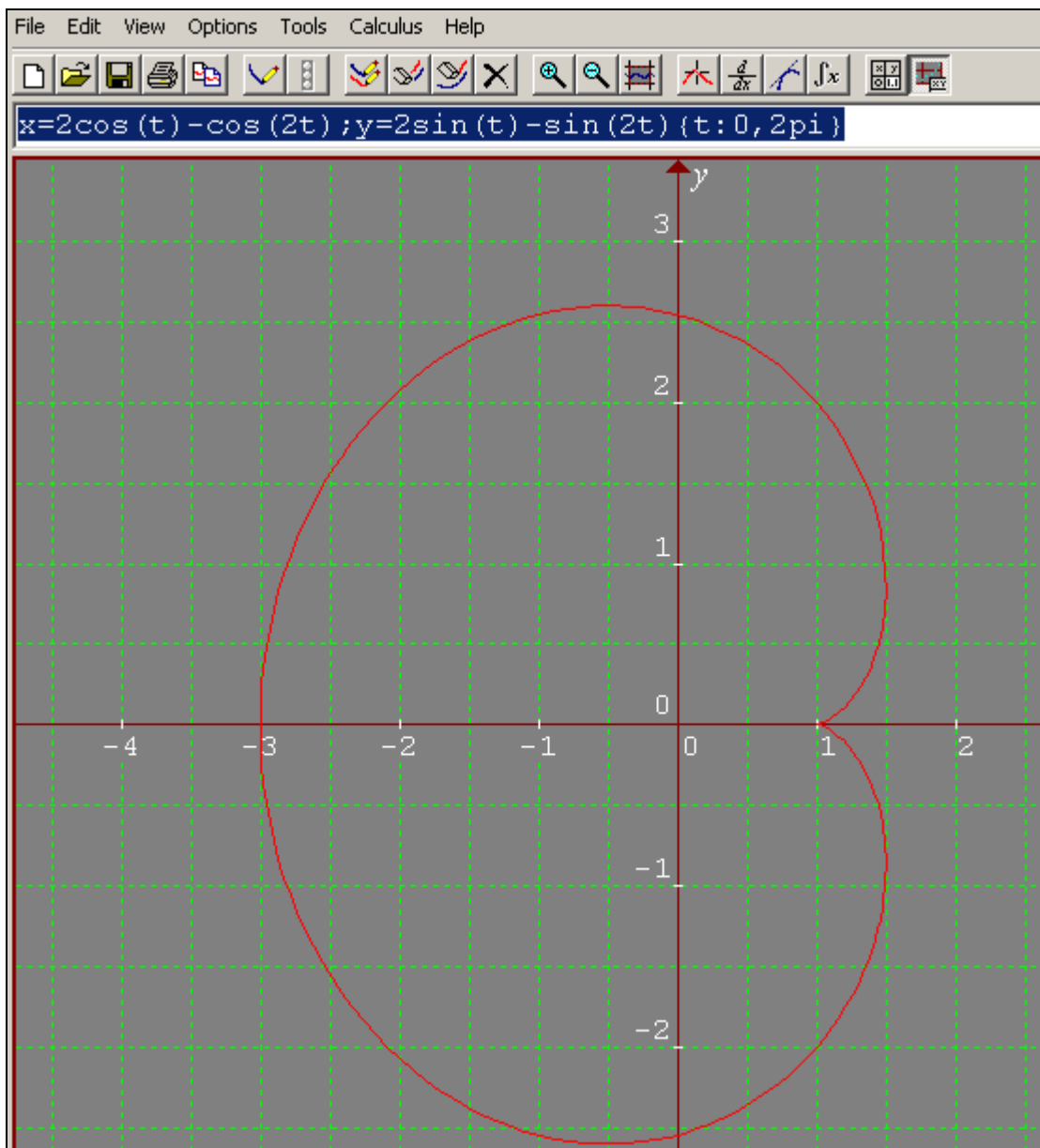
t	xt1	yt1	
0.	1.	0.	
.7854	1.4142	.41421	
1.5708	1.	2.	
2.3562	-1.414	2.4142	
3.1416	-3.	...	
t=0.			

MAIN RAD AUTO PAR

Forløbet kan aflæses i TABLE.

Graphmatica:

Vektorfunktionen indtastes med grænser som vist nedenfor.



Mathcad:

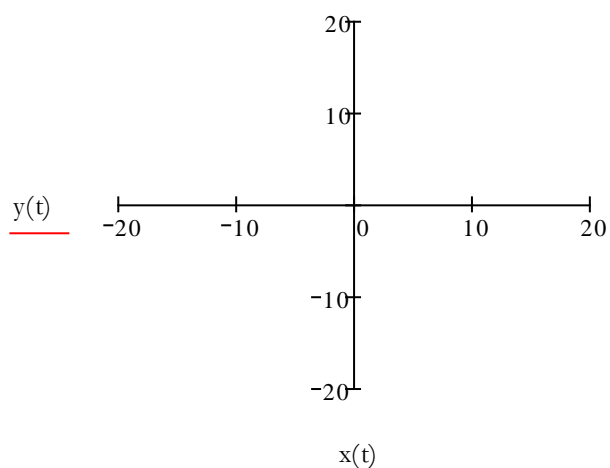
ANIMATION AF VEKTORFUNKTION

$$x(t) := 2 \cdot \cos(t) - \cos(2t)$$

$$y(t) := 2 \cdot \sin(t) - \sin(2t)$$

$$t_0 := \text{FRAME}$$

$$t := 0, 0.1.. \frac{\text{FRAME}}{10}$$



Ved animation vælges i menuen
Tools, Animation, Record.
"Grænser" sættes
og området der skal animeres
markeres.

Vælg: Tools, Animation, Record, Indstil From To og At.

The screenshot shows the Mathcad interface with a graph of a vector function $y(t)$ versus $x(t)$. The graph has a horizontal axis $x(t)$ and a vertical axis $y(t)$, both ranging from -20 to 20. A blue dialog box titled "Record Animation" is open over the graph. The dialog box contains the following fields and buttons:

- For FRAME** section:
 - From:
 - To:
 - At:
 - Frames/Sec:
- A large empty box labeled "FRAME=".
- Buttons: Animate, Cancel, Save As..., Options...
- Instructions: "Select an area of your worksheet whose contents are based on the FRAME variable, enter starting and ending FRAME values, and choose Animate."

Marker området der skal "animeres":

This screenshot is similar to the previous one, but the graph area is now enclosed in a dashed red border, indicating that it has been selected for animation. The "Record Animation" dialog box remains open, showing the same settings as in the previous image.

Animationen dannes:

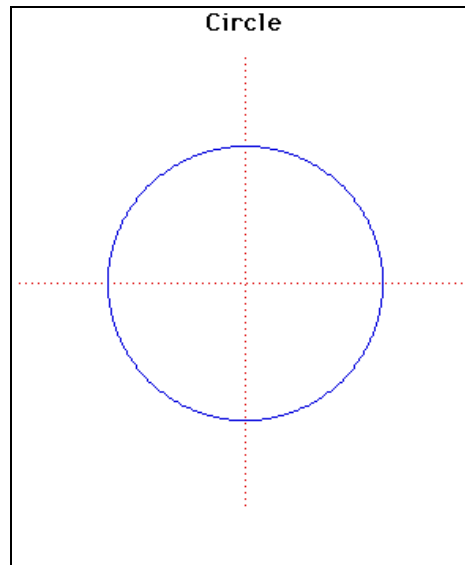
The screenshot shows the Mathcad interface with a plot of a vector function $\vec{r}(t)$ in the $x(t)$ - $y(t)$ plane. The plot shows a red curve starting at the origin and moving into the first quadrant. Two dialog boxes are overlaid on the plot:

- Play Animation:** A window with a play button, a slider, and a stop button. The plot area is visible through it.
- Record Animation:** A dialog box with the following settings:
 - For FRAME: From: 0, To: 100, At: 10, Frames/Sec: (empty)
 - Buttons: Animate, Cancel, Save As..., Options...
 - Text: Select an area of your worksheet whose contents are based on the FRAME variable, enter starting and ending FRAME values, and choose Animate.

Afspil animationen:

This screenshot is similar to the first one, but the 'Play Animation' dialog box is now open, and the slider is moved to the right, indicating that the animation is being played back. The 'Record Animation' dialog box remains open with the same settings as in the previous image.

Parameterkurver/Banekurver



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + a \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Mathcad - [Animation%20af%20vektorfunktion%202001[1]]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

Normal Arial

ANIMATION AF VEKTORFUNKTION

$$x(t) := 2 + 2 \cos(t)$$

$$y(t) := 3 + 2 \sin(t)$$

$$t_0 := \text{FRAME}$$

$$t := 0, 0.1 \dots \frac{\text{FRAME}}{10}$$

Play Animation

Record Animation

For FRAME

From: 0

To: 100

At: 10

Frames/Sec

FRAME = 100

Animate

Cancel

Save As...

Options...

Select an area of your worksheet whose contents are based on the FRAME variable, enter starting and ending FRAME values, and choose Animate.