INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
Indledning	2
Kapitel 1	
Introduktion til funktioner af 2 variable	3
Niveaukurver	5
Kapitel 2	
Partiel differentiation og gradienten	7
Kapitel 3	
Differentialet	12
Fejlvurdering	13
Tangentplan	14
Kædereglen	15
Retningsafledet	16
Ekstrema for funktioner af to variable	17
Kapitel 4	
Taylorpolynomier i en og to variable	24
Eksperimentelt CAS forløb om Taylorpolynomier	25
Appendiks 1	
Bevis for sætning 3.13	28
Løsningsforslag i Maple til Eksperimentelt CAS forløb	29
Appendiks 2	
Grænseværdi og kontinuitet	30
Opgaver	33

Funktioner af 2 variable

Et undervisningsforløb med CAS
(2-20 timer)

Dette undervisningsforløb er udviklet og afprøvet under projektet Naturvidenskab i Verdensklasse.

Nødvendig forudsætning: Differentialregning + et CAS redskab.
Andre forudsætninger: Begrænset kendskab til vektorer.
Forløbet kan gennemføres uden yderligere litteratur.

Kapitel 4 handler om Taylorpolynomier og funktioner af to variable og kan delvis behandles uafhængig af de forrige kapitler. Dette gælder også det eksperimentelle forløb (ca. 2-5 timer) om Taylorpolynomier for funktioner af 1 variabel i dette kapitel.
Alle dele af materialet kan gennemføres med læreren som konsulent på nær et par korte seancer. Det kan gennemføres fra slutningen af 2.g på A+ niveau.

Vi skal i det følgende beskæftige os med funktioner af 2 variable, og vi vil i stor udstrækning udnytte CAS værktøjer som Derive, Mathcad, Maple, TI-Interactive.
Det er underordnet, hvilket CAS værktøj du anvender. Der vil dog blive givet eksempler i Derive og Maple.

Vi vil tit tage udgangspunkt i øvelser fra funktioner af en variabel for dernæst at generalisere til funktioner af 2 variable.

Christian Thune Jacobsen
juni 2003.

Kapitel 1

Øvelse 1.1
Lad en differentiabel funktion f være givet ved forskriften $f(x) = x^3 - 3x$, $0 \leq x \leq 2$.
Bestem minimum og maksimum for funktionen.

I øvelse 1 anvendes normalt nedenstående fremgangsmåde, der på helt analog måde kan udvides til funktioner af to variable.
Fremgangsmåde for funktion af en variabel:
I. Først findes de punkter i definitionsmængden, hvor f har vandrette tangenter, og funktionsværdierne i disse punkter beregnes.
II. Herefter beregnes funktionsværdierne i intervalendepunkterne i definitionsmængden.
III. Mindste og største værdi udsøges blandt de beregnede værdier fra I og II.

Fremgangsmåde for funktion af to variable:
I. Først findes de punkter i definitionsmængden, hvor f har vandrette tangentplaner, og funktionsværdierne i disse punkter beregnes.
II. Herefter udsøges maximum og minimum blandt punkterne på randen af definitionsmængden.
III. Mindste og største værdier udsøges blandt de beregnede værdier fra I og II.

Visualisering:
For at forstå fremgangsmåden for to variable kan det hjælpe at tænke på følgende måde:
Vi tager et landkort og tegner en firkant (rektangel) ind som grænser for vores land. På kortet kan vi nu give alle punkter i firkanten koordinater (Vi kunne jo vælge at indlægge x- og y-akse ind langs to af rektanglets sider). Alle punkterne i rektanglet svarer til definitionsmængden, mens højden målt over havoverfladen for hvert koordinatsæt i vort land svarer til funktionsværdien. Grafen for vor funktion f(x,y) er således fladen som angiver landskabet med bjerge og dale. At bestemme minimum og maksimum for vores funktion svarer således til at finde den dybeste dal og den højeste top i vort land. Hvis vi ønsker at finde den højeste top i vort land, så skal der søges blandt de bjergtoppe vi har i vort land eller på grænsen til et naboland, thi vi kunne jo stå på en bjergside hvor toppen i nabolandet ligger højere end vores egne bjergtoppe.

I løbet af de følgende sider vil vi møde de begreber, der gør os i stand til at behandle ekstremums bestemmelse for funktioner af to variable.

Funktion af to variable
Formelt siges : Hvis der til ethvert talsæt (x,y) i en definitionsmængde D er tilordnet netop et reelt tal f(x,y) i en mængde M i de reelle tal, da haves en funktion af to variable.

I forbindelse med definitions mængder opereres med begreberne :
Åben mængde , lukket mængde, begrænset mængde, ikke begrænset mængde, sammenhængende mængde, ikke sammenhængende mængde, indre punkt, randpunkt, omegn.

Øvelse 1.2
Mængden $A=\{(x,y)|1<x<2 \wedge 1<y<4\}$ er åben, sammenhængende og begrænset. (skitsér mængden).
Mængden $B=\{(x,y)|1\leq x \leq 2 \wedge 1\leq y\leq 4\}$ er lukket, sammenhængende og begrænset. (skitsér mængden).
Mængden $C=\{(x,y)|1<x<2 \wedge 1<y\}$ er åben, sammenhængende og ej begrænset. (skitsér mængden).
Mængden $D=\{(x,y)|1\leq x \leq 2 \wedge 1\leq y\}$ er lukket, sammenhængende og ej begrænset. (skitsér mængden).
Mængden $E=\{(x,y)|1<|x|<2 \wedge 1<y\}$ er åben, ej sammenhængende og ej begrænset. (skitsér mængden).

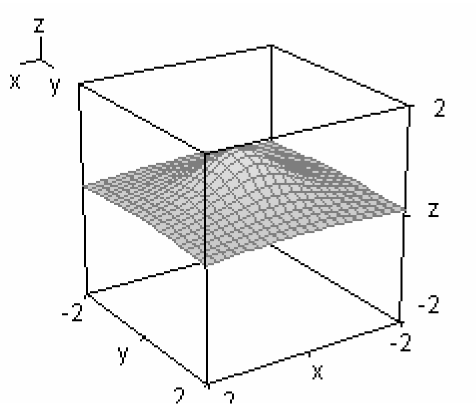
Øvelse 1.3
Diskuter ovennævnte begreber med hinanden og forsøg at tegne nedenstående mængder ud fra Jeres eget gæt på hvad begreberne dækker over:

I. Tegn i xy-planen en mængde der er begrænset og åben.
II. Tegn i xy-planen en mængde der lukket men ikke er begrænset.
III. Indtegn randen af den i I. bestemte mængde.
IV. Lav en mængde M, der er lukket, ej begrænset, ej sammenhængende.

Visualisering:
Såfremt en mængde i xy-planen er begrænset så vil det være muligt at tegne en cirkel med endelig radius og et tilfældigt valgt centrum, således at hele mængden er indeholdt i cirklen.

Ved grafen for en funktion af 2 variable forstås punktmængden $\{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$.
Det hjælper at tænke på grafen som en landskabsflade.

figur 1



Ovenfor ses grafen for funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

Prøv at tegne grafen i et 3d-plot med dit CAS værktøj, forsøg at dreje den og se på den fra forskellige observations steder.

Øvelse 1.4
Beregn for funktionen vist i figur 1 følgende funktionsværdier; udnyt evt. dit CAS værktøj:
f(0,0) , f(−1,0) , f(1,0) , f(0,1) , f(1,1) , f(2,1) ,
og idet t er et reelt tal skal du beregne f(1,t) , f(t,t) , f(t,t²).

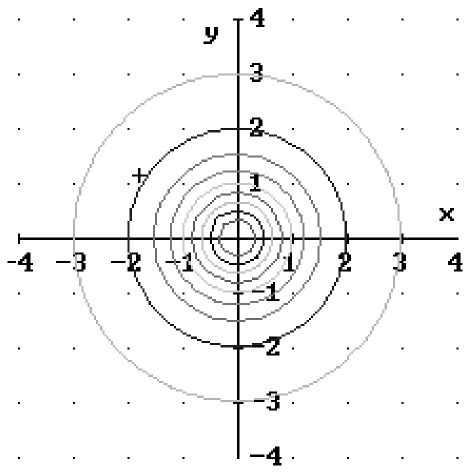
En **niveaukurve** er en punktmængde $\{(x,y) \mid f(x,y)=c\}$ hvor f(x,y) har den konstante værdi c. En niveaukurve er således det der svarer til en højdekurve på et vandrekort.

Øvelse 1.5
Udnyt dit CAS program til at tegne niveaukurver (contourplot) af funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

I Derive søges på contourplot i help, og v.h.a. vector kommandoen og simplify before plotting bør du kunne genskabe 2D plottet på figur 2, der er lavet i Derive:

$$\#3: \quad \mathrm{VECTOR}\left(z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1},\ z,\ 0,\ 2,\ 0.1\right)$$

figur 2



Øvelse 1.6
Diskuter hvad der egentlig kan aflæses af ovenstående figur.

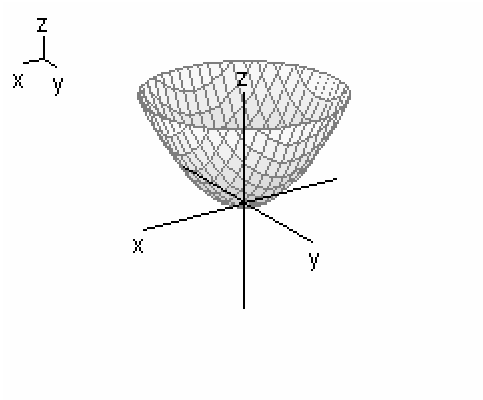
Eksempel 1.7
Lad os lave en grafisk inspektion af funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in R^2$

niveaukurver. Vi får $x^2 + y^2 = c$ hvilket er cirkler med centrum i (0,0).
Ud fra niveaukurverne kan vi slutte, at fladen må have en form som en rund skål.

tværsnit. Ved at indsætte $y = 0$ i ligningen $z = x^2+y^2$ fås at $z = x^2$, hvilket er en parabel.
Ved at sammenholde niveaukurverne med tværsnittet kan vi indse, at det handler om en skål med parabelform.

Prøv at plotte funktionen (der er vist på figur 3) i 3D med dit CAS værktøj.

figur 3



Tolkning.
Hvad kan da siges om niveaukurver ?
Hvis man følger en niveaukurve i definitionsmængden, dvs. i xy-planen for funktioner af to variable, så vil man på grafen hele tiden være i samme højde over xy-planen.

Øvelse 1.8
Lav først nogle 3D plot af følgende funktioner ved brug af dit CAS værktøj. Tegn dernæst et par enkelte niveaukurver.
$f(x,y) = -xy$
$f(x,y) = \sin x + \sin y$

Øvelse 1.9
Skitser nogle niveaukurverne for $f(x,y) = c$ for nogle udvalgte c-værdier med $c>0$ for følgende funktioner
$f(x,y) = 3x-2y$
$f(x,y) = x^2 - y^2$

Kapitel 2

Partiel differentiation og gradienten.
Det at differentiere en funktion af to variable med hensyn til en af de variable, mens den anden variabel behandles som en konstant, kaldes partiel differentiation. Resultatet kaldes en partielafledet.

Eksempel 2.1
Lad os betragte funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$.
Hvis vi opfatter y som en konstant og differentierer mht. x fås den partielle afledede $f_x(x,y) = 2x + y$ som også skrives $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ hvor der er anvendt et blødt "d" ved differentiationen, hvilket viser at funktionen har flere variable.
Hvis omvendt x opfattes som en konstant, kan vi finde f´s partielle afledede med hensyn til y til $f_y(x,y) = x + 3y^2$.
De partielle afledede i punktet (x,y)=(1,2) er $f_x(x,y)=4$ og $f_y(x,y)=13$.
Af de partielle afledede danner man en vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, der kaldes **gradienten** af f. Den skrives også **grad**(f) eller ∇f.
f har således gradienten $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (4,13)$ i punktet (x,y)=(1,2).

Eksempel 2.2
Maple
I programmet Maple kan de partielle afledede for funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ findes med følgende kommandoer:

```
>f(x,y)−>x^2+x*y+y^2;
>diff(f(x,y),x);
>diff(f(x,y),y);
>diff(f(x,y),x,x);
>diff(f(x,y),x,y);
>diff(f(x,y),y,y);
```

Øvelse 2.3
Udnyt dit CAS værktøj til at bestemme de partielle afledede for funktionerne :
$f(x,y) = x^2+xy+y$
$g(x,y) = x^2\sin(y)$
$h(x,y) = \sin(xy)$

Øvelse 2.4
Programmer som Derive og Maple har en direkte kommando til bestemmelse af gradienten.
Bestem gradienten for funktionen $f(x,y)=x^2-y^3-2xy$ ved beregning i hånden. Kontrollér dernæst dit resultat v.h.a. dit CAS værktøj.

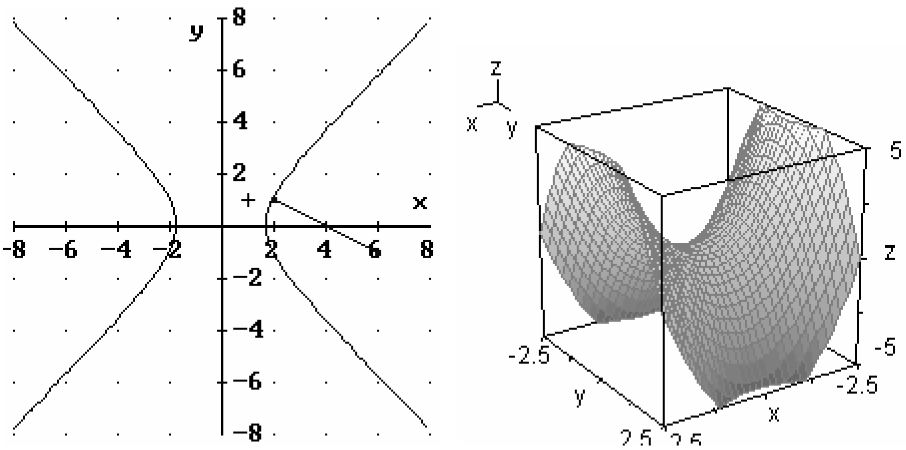
Spørgsmål
Gradienten er en vektor –
Overvej hvordan gradienten ser ud for en funktion af tre variable ?
Overvej hvordan gradienten ser ud for en funktion af én variabel ?
Benyt dit CAS værktøj til at afprøve dine idéer på nogle simple funktioner.
Hvad er gradienten af $f(x) = x^2$ når $x = 3$?
Hvad er gradienten af $g(x,y,z) = xy+2xz+4yz^2$?

Tolkning.
De partielle afledede kan tolkes som hældningskoefficienter til tangenterne, der ligger parallelle med henholdsvis x-aksen og y-aksen. Det betyder at gradienten i et punkt, og her skal man tænke på gradienten som en vektor der ligger nede i xy-planen, vil pege i den retning, hvor funktionen vokser kraftigst. Omvendt vil funktionen aftage mest i den modsatte retning af hvor gradienten peger hen. Altså hvis vi står i et punkt i definitionsmængden nede i xy-planen (funktionsværdien er da afbilledet i z-aksen dvs. i et punkt over os) så vil en spadseretur i gradientens retning nede i xy-planen føre til at funktionsværdien vokser kraftigst. (Det kan hjælpe at tænke på en model af et bjerglandskab, hvor funktionsværdien svarer til højden over havniveau og x og y koordinaterne i definitionsmængden svarer til længde og bredde graden)
Hvis vi i ovenstående eksempel står i punktet (x,y)=(1,2) og bevæger os i retningen (4,13) så vil funktionen vokse kraftigst. (Vi går i vort landskab i den retning, hvor det går stejlest op ad bakke).

Øvelse 2.5
Såfremt man bevæger sig langs en niveaukurve (tænk på højdekurven i et landskab). Overvej da i hvilken retning gradienten nødvendigvis må være rettet i forhold til højdekurven?

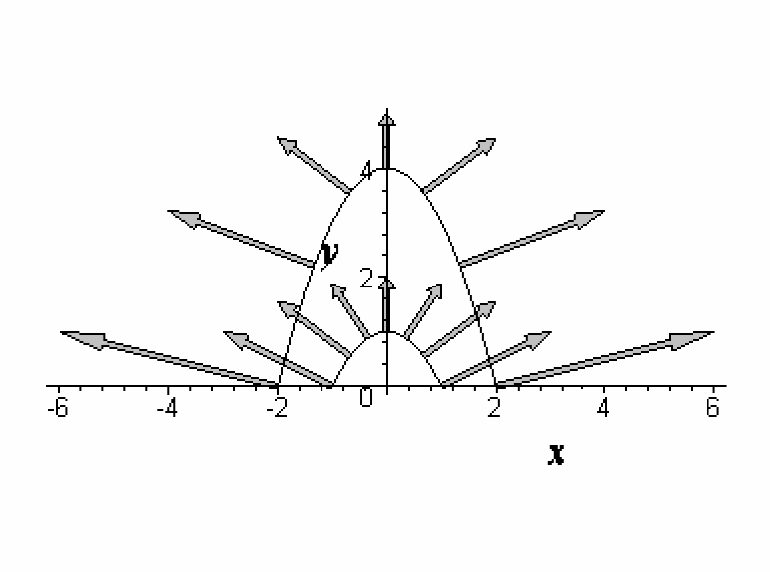
Eksempel 2.6
Lad funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2$ være givet og lad os se på niveaukurven f(x,y)=3.
Senere vil vi bevise, at det gælder, at gradientvektoren (2x,−2y) er vinkelret på niveaukurven.
I punktet (2,1) , der ligger på niveaukurven, er gradienten (4,−2) , og den ses på figur 4 at være normal til niveaukurven.

figur 4



På figur 5 er vist to niveaukurver med de tilhørende gradientvektorer af funktionen $g(x,y)=x^2+y$.
Det ses tydeligt, at gradientvektorerne står vinkelret på niveaukurverne.

figur 5



Øvelse 2.7
Lav et 3D plot af funktionen g(x,y)=x²+y og sammenlign med figur 5.

Eksempel 2.8
Derive

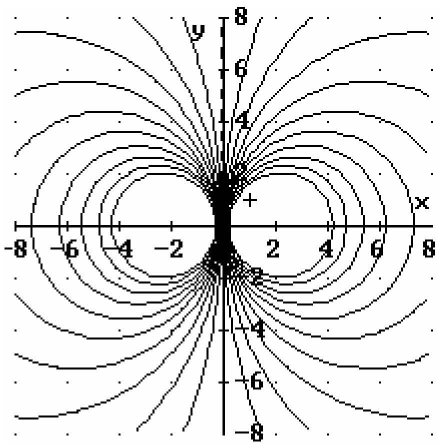
Lad os kigge på funktionen $f(x,y) = \dfrac{9x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Vi definerer funktionen f.

```
                        9·x
       f(x, y) :=  ─────────────
#1:                  2     2
                    x  + y  + 1
```

Vi udnytter vector-kommandoen til at få tegnet nogle niveaukurver.
Husk udnyt simplify before plotting.

```
              ⎛        9·x                     ⎞
       VECTOR ⎜z = ─────────────, z, -2, 2, 0.2⎟
#2:           ⎜      2     2                   ⎟
              ⎝     x  + y  + 1                ⎠
```



Vi bemærker at niveaukurverne tilsyneladende er cirkellignende.
Det ser ud som om at der er toppe(maksima) eller dale(minima) omkring punkterne(-2,0) og (2,0).

Vi beregner gradienten

#3: $$\mathrm{GRAD}\left(\frac{9\cdot x}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

#4: $$\left[-\frac{9\cdot(x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},\ -\frac{18\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2 + 1)^2},\ 0\right]$$

Vi benytter nu substitutionskommandoen SUB til at beregne gradienten i punktet (6,4).

#5: $$\left[-\frac{171}{2809},\ -\frac{432}{2809},\ 0\right]$$

Det bemærkes at Derive har tilføjet en trediekoordinat med værdien nul, hvilket Derive gør af en program teknisk årsag.
Vi afrunder gradienten og bemærker at den peger i den retning, hvor funktionen stiger kraftigst set ud fra punktet (6,4) og det ses endvidere, at den står vinkelret på niveaukurven i dette punkt.

#6: [-0.06087575649, -0.1537913848, 0]

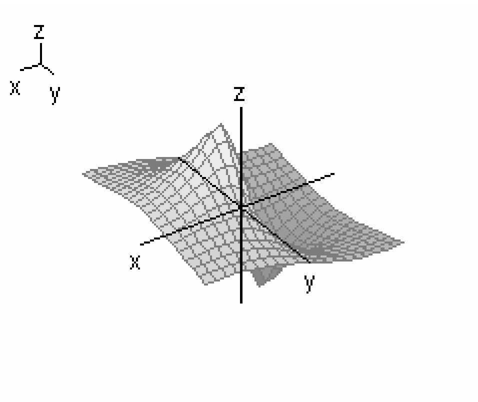
Vi kan se at niveaukurverne ligger tættere i punktet (1/2,1/2) end i punktet (6,4) og dette afspejles også i gradienten udregnet i dette punkt. Vi udnytter igen SUB kommandoen på #4 med (1/2,1/2).

#7: [4, -2, 0]

Det ses let, at gradienten [4,-2], hvor tredjekoordinaten (der alene skyldes Derive) er udeladt (=0), i punktet (1/2,1/2) er længere end gradienten i punktet (6,4). *Kontrollér evt. ved udregning af længderne for de to gradientvektorer.*

Øvelse 2.9

Funktionen $f(x, y) = \dfrac{9x}{x^2 + y^2 + 1}$



har cirkler som niveaukurver, (som antydet i eksempel 2.8)
Vis dette ved at omskrive ligningen f(x,y) = c til formen (x-?)² + (y-?)² = R² , hvor centrums 1. koordinat afhænger af c, og radius afhænger af c.
Udnyt eventuelt dit CAS værktøj til at undersøge centrums beliggenhed for forskellige c-værdier.
Hvordan går det med radius ?
Kan c være lig –1 og hvad med c = –100 ?

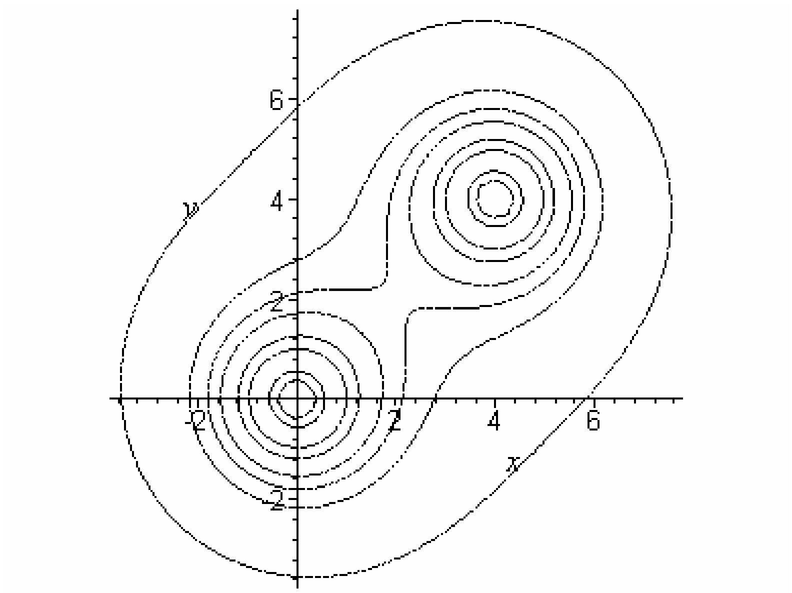
Eksempel 2.10
Lad os se på en anvendelse i fysik
Lad to positive ladninger være anbragt i xy-planen i henholdsvis punkterne (0,0) og (4,4).
Deres potentialer kan angives ved henholdsvis

$$U(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{og} \qquad V(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}}$$

Potentialet for det samlede system er da summen

$$W(x,y)=U(x,y)+V(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}}$$

Et plot af niveaukurverne viser, at ved tilpas stor afstand ses ikke længere to positive ladninger, men at de to ladninger mere og mere optræder som en enkelt ladning placeret i (2,2).



(Normalt anvender matematikere et positivt potential, mens en fysikker vil foretrække at sætte et minustegn foran udtrykkene for potentialerne.)

Kapitel 3

Differentialet
Du skal nu indtaste funktionen $f(x)=x^2$ og tegne grafen. Indtegn endvidere tangenten for funktionen f i punktet (1,1). Hvis vi nu følger grafen fra $x_o=1$ til $x_o+\Delta x$ med $\Delta x=1$, d.v.s. vi går fra x=1 til x=2, så bliver funktions tilvæksten i vores tilfælde $\Delta y=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=4-1=3$.
Hvis vi nu i stedet havde valgt at følge tangenten for f i x_o, så var y-tilvæksten blevet $f'(x_o)\cdot\Delta x=2\cdot 1=2$, denne tilvækst kaldes differentialet.

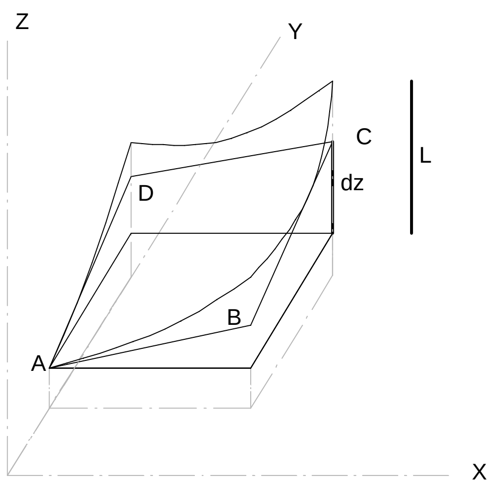
Den præcise **definition** for en funktion af en variabel er:
Differentialet $df(x_o,\Delta x)$ {der kort skrives df} af funktionen i et punkt x_o for tilvæksten Δx er defineret ved $d(f(x_o,\Delta x)=f'(x_o)\cdot\Delta x$.

For funktioner af to variable indføres differentialet analogt. D.v.s. i stedet for at følge grafen for f (tænk på grafen som et landskab) fra punktet (x_o,y_o) til punktet $(x_o+\Delta x,y_o+\Delta y)$, så følger vi tangentplanen i (x_o,y_o). Dette kræver at $z = f(x,y)$ har kontinuert partielle afledede i punktet (x_o,y_o).
z-tilvæksten er da $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_{0)})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_{0)})\Delta y$
dette differential skrives kort $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Ved hjælp af figur 6 kan der laves et geometrisk bevis med brug af vektorer, idet punktet A har koordinatsættet (x_o,y_o,z_o), punktet B har koordinatsættet $(x_o+\Delta x, y_o, z_o)$, og liniestykket L er netop Δz, og grafen for f(x,y) er den let buede flade.

Øvelse 3.1
Prøv at gennemføre det geometriske bevis, idet du udnytter at $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, og udtryk vektorerne ved hjælp af Δx, x_o etc.)

Det skal bemærkes at funktionstilvæksten er $\Delta z = f(x_o+\Delta x,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)$, hvilket jo er tilvæksten man får, når grafen følges i stedet for tangentplanen.

figur 6



I Maple kan differentialet findes ved brug af pakken difforms:
```
> with(difforms):
> defform(x=0,y=0); d(x^2+y^4+x^2+5*x+2);
```
$$(4x+5)d(x)+4y^3d(y)$$

Fejlvurdering
Differentialer bruges f.eks. i forbindelse med fejlvurdering.
Den absolutte fejl på en talværdi x defineres ved $\Delta x = x_0 - x$, her betegner x_0 således den rigtige værdi.
Den relative fejl defineres ved $\frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x}$.
Hvis vi forudsætter at dx og dy er numerisk små kan grafen for f erstattes med tangentplanen.
Koefficienterne $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaldes z´s følsomhed over for fejl på henholdsvis x og y.

Eksempel 3.2
Arealet A af en retangulær mark bestemmes vha. bredden B og længden L. Lad de absolutte fejl på B og L være dB og dL. Den absolutte fejl på markens areal A=B·L er da tilnærmelsesvis dA=B·dL+L·dB.
Hvis L = 200 m og B = 50 m , bliver dA = 200dB+50dL, det ses heraf, at A har størst følsomhed for fejl på B.

Øvelse 3.3
En kugleformet olietank har radius r. Væskehøjden ,h, i tanken kan måles vha. en oliepind.
Væskerumfanget ,V, er givet ved $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.
Angiv et tilnærmet udtryk ved hjælp af et differential for hvor meget V bliver for stor, når h≈0,2 m og r≈0,7 m er målt henholdsvis Δh og Δr for store.

Tangentplan
Lad S være en overflade givet ved ligningen z=f(x,y), hvor f har kontinuerte partielle afledede f_x og f_y.
Lad $P(x_0,y_0,z_0)$ {svarende til punktet A på figur 6} være et punkt på S , og lad C_1 være den kurve, der fremkommer ved skæring med planen med ligningen $x=x_0$ {på figur 6 svarer det til kurven gennem punkterne A og punktet "over " D} og C_2 være den kurve, der fremkommer ved skæring med planen med ligningen $y=y_0$ {på figur 6 svarer det til kurven igennem punktet A og punktet "over" B}.
Tangentlinierne T_1 {svarende til linien gennem punkterne A og D på figur 6} og T_2 {svarende til linien gennem punkterne A og B på figur 6} i punktet P udspænder en plan, som man med rette kan kalde tangentplan til fladen S i punktet P.
For at finde en ligning for tangentplanen kan viden fra rumgeometrien udnyttes. Lad **N**=(A,B,C) være en normalvektor til planen. En ligning for planen kan da skrives

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hvis C er forskellig fra nul, kan vi dividere med C på begge sider og sætte a=–A/C og b=–B/C og få

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

Skæringen af denne plan med planen med ligning $x=x_0$ er tangent linien T_1 , som har hældningen $f_y(x_0,y_0)$ som fås ved hjælp af den geometriske fortolkning af de partielle afledede.
Så ved at indsætte $x=x_0$ i ligningen for tangentplanen ses, at T_1 har hældningen i dette punkt givet ved

$$z-z_0=b(y-y_0)$$

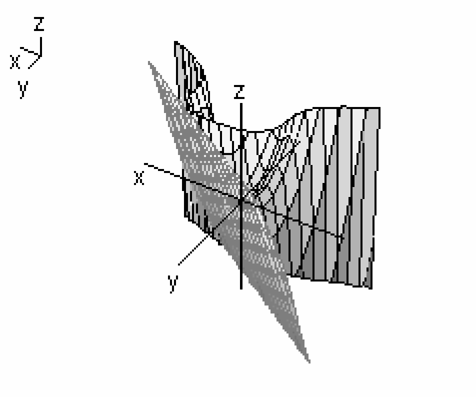
så der må gælde at $b = f_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Tilsvarende fås, at T_2 har hældningen $a=f_x(x_0,y_0)$.

Vi har hermed vist følgende:

Sætning 3.4
Lad S være en overflade med ligning z=f(x,y) og lad $P(x_0,y_0,z_0)$ være et punkt på S, hvor tangentplanen eksisterer. Da er ligningen for tangentplanen til S i punktet P givet ved ligningen

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Eksempel 3.5
Vi vil finde tangentplanen for funktionen $f(x,y) = x^2+y^3$ i punktet (1,1).



$f_x(x,y)=2x$, $f_x(1,1)=2$

$f_y(x,y)=3y^2$, $f_y(1,1)=3$

Tangentplanens ligning bliver

$$z-2 = 2(x-1)+3(y-1)$$

eller

$$2x+3y-z = -3$$

I programmet Maple kan kommandoen mtaylor anvendes til at finde en tangentplan:

```
> mtaylor((x^2+y^3), [x=1,y=1], 2);
```

$$-3+2x+3y$$

I andre programmer kan man være nødt til gå vejen over de partielle afledede.

Øvelse 3.6
Vis, at tangentplanen til overfladen $z = \exp(x^2-y^2)$ i punktet (1,–1 ,1) er givet ved ligningen $2x+2y+z = -1$.
Plot såvel funktionen $f(x,y)=\exp(x^2-y^2)$ som tangentplanen i samme 3Dplot.

I stil med det approksimerende førstegradspolynomium for funktioner af en variabel, hvor funktionsværdier tilnærmes med tangentens y-værdier for funktionen i en omegn af tangentens røringspunkt, kan tangentplanen for en funktion af to variable anvendes til at approksimere funktionsværdier tæt på røringspunktet.

Kædereglen

Kædereglen er en udvidelse af reglen for sammensat differentiation for en funktion af en variabel til funktioner af flere variable.

Kædereglen for en funktion af en variabel (sammensat differentiation) lyder

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Diskutér med din matematiklærer, hvorfor den kan skrives på denne form.

Sætning 3.7 *kæderegel for funktion af to variable f(x,y)*
Lad f(x,y) være en differentiabel funktion af x og y , og lad x=x(t) og y=y(t) være differentiable funktioner af t. Da er z=f(x,y) en differentiabel funktion af t og

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Om beviset:
Kan gennemføres ved at udnytte figur 6, hvor det kan indses, at Δz kan skrives på formen:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

Denne ligning divideres igennem med Δt (idet Δt≠0), og da vi endvidere kan skrive
Δx = x(t+Δt)–x(t) og Δy = y(t+Δt)–y(t) ,
kan man ved passende grænseovergange (overvej hvilke) nå frem til et komplet bevis.
(Vink: Kig på $\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$).

Bemærkning:
Idet ∇f= $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, og vi sætter $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, så kan kædereglen også skrives

$\frac{df}{dt}=\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$, hvilket kan indses ved at udregne skalarproduktet af de to vektorer ∇f og $\vec{r}(t)$

Nedenstående sætning handler om gradientens geometriske betydning.

Sætning 3.8
I et punkt P, hvor gradienten ∇f≠(0,0) {d.v.s gradienten skal være forskellig fra nulvektoren} gælder: Gradienten er normalvektor til f´s niveaukurve gennem P.

Bevis:
Lad **r**(t)=(x(t),y(t)) være parameter fremstillingen for en niveaukurve c til f(x,y), altså f(x(t),y(t))=c for alle værdier af t. Da haves, at $\frac{df}{dt}=0$ (idet en konstant differentieret er lig nul).

Nu udnyttes bemærkningen til kædereglen: $\frac{df}{dt}=\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$ og dermed $0=\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$

Idet skalarproduktet er nul, så må gradientvektoren ∇f stå vinkelret på niveaukurven c´s tangentvektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$

Det er hermed vist, at ∇f er normalvektor til niveaukurven. Altså at gradienten står vinkelret på niveaukurven.

Retningsafledet
Visualisering:
Lad os forestille os, at vi er i et punkt (x_0,y_0) på fladen for en funktion af to variable (tænk på et bestemt punkt midt på en bakke i et bakket landskab). Vi kan da tale om stigningen i dette punkt i en bestemt retning. Det handler således om at kigge på hældningen i forhold til xy-planen af en tangentlinie. Denne linie er i øvrigt indeholdt i tangentplanen.
Dette giver anledning til at indføre den retningsafledede således:

Definition 3.9 *Den Retningsafledede:*
Lad f være en funktion af to variable og lad **e**=$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ være en enhedsvektor.
Den retningsafledede af f i punktet $P_0(x_0,y_0)$ i retning af **e** er da givet ved

$f_e(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+he_1,y+he_2)-f(x_0,y_0)}{h}$ under den forudsætning at grænseværdien eksisterer.

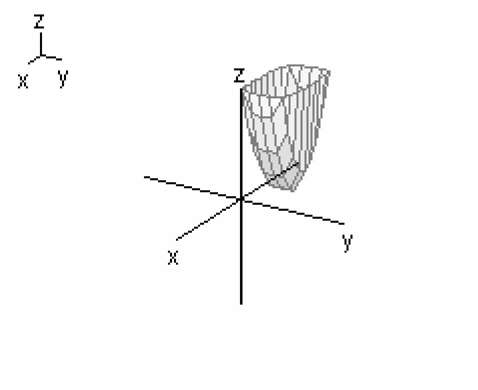
Eksempel 3.10
Find den retningsafledede af $f(x,y) = 4-x^2+y^3$ i punktet P(1,2) i retning af vektoren **u**=(3,4).
Løsning:
En enhedsvektor **e** parallel med **u** findes ved at dividere vektor **u** med sin længde **e** = (3/5,4/5). De partielle afledede er $f_x(x,y)=-2x$ og $f_y(x,y)=3y^2$
Vi finder da $f_u(1,2) = f_x(1,2)\cdot 3/5+f_y(1,2)\cdot 4/5 = -2\cdot 3/5+12\cdot 4/5 = 8.4$
Dette kan geometrisk fortolkes således, at tangenten i punktet P(1,2) til grafen(fladen) for f i retningen af vektoren **u** har en hældningningskoefficient 8.4 med xy-planen.

Øvelse 3.11
Find den retningsafledede af funktionen $f(x,y) = x^2+y^2$ i punktet $P_0(1,1)$ i retning af vektoren **u**=(4,-3).
Lav et plot af funktionen og se, om du kan visualisere dit resultat.

Øvelse 3.12
Find den retningsafledede af funktionen $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ i punktet $P_0(1,-1)$ i retning ind mod Origo.
Lav et plot af funktionen, og prøv at indlægge en linie i xy-planen gennem P_0 og Origo.

Ekstrema for funktioner af to variable

Nedenfor er vist funktionen $f(x,y)=(x+2)^2+(y-1)^6$



Det ses at funktionen har et minimum (i alle tilfælde lokalt). Dette minimum indtræffer i et såkaldt stationært punkt (kritisk punkt).

Visualisering:
Det at en bjergbestiger har nået bjergtoppen kan karakteriseres ved, at uanset i hvilken retning bjergbestigeren tager et vilkårligt lille skridt, så vil højden af det nye punkt ligge lavere.
Dette giver anledning til nedenstående mere præcise matematiske definition.

Definition af globalt ekstrema
En funktion $f(x,y)$ siges at have **globalt maksimum** i (x_0,y_0), hvis $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ for alle (x,y) i definitionsmængden D for funktionen f.
Tilsvarende: En funktion $f(x,y)$ siges at have **globalt minimum** i (x_0,y_0), hvis $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ for alle (x,y) i definitionsmængden D for funktionen f.

Definition af lokalt ekstrema
Lad f være en funktion defineret i (x_0,y_0). Da er $f(x_0,y_0)$ et **lokalt maksimum** såfremt $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ for alle x i en åben omegn indeholdende (x_0,y_0).
Lad f være en funktion defineret i (x_0,y_0). Da er $f(x_0,y_0)$ et **lokalt minimum** såfremt $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ for alle x i en åben omegn indeholdende (x_0,y_0).

Ekstrema for en funktion af to variable skal derfor søges blandt en af følgende tre situationer:
1. På randen af definitionsmængden D for funktionen.
2. I indre punkter i definitionsmængden D, hvor gradienten ∇f ikke eksisterer.
3. I de punkter, hvor $\nabla f=\mathbf{0}$, dvs. hvor $f_x=f_y=0$. *(Bemærk at* $\nabla f=\mathbf{0}$ *,er en vektor ligning!)*

Vi kender følgende sætning for funktioner af en variabel (jf. lærebogen):

Sætning for funktion af en variabel
Lad x_0 være et stationært punkt for en differentiabel funktion f (dvs. $f'(x_0)=0$). Der gælder da:
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ *der er lokalt minimum i x_0*
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ *der er lokalt maksimum i x_0*
$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ *intet vides, en nærmere undersøgelse er nødvendig.*

Vi bringer nu den analoge sætning for funktioner af to variable:

Sætning 3.13 *Den anden ordens partielle test om arten af et stationært punkt*

Lad f(x,y) være en funktion af to variable med kontinuerte partielle afledede af anden orden i en omegn indeholdende punktet $P(x_0,y_0)$, der antages at være et stationært punkt. Lad

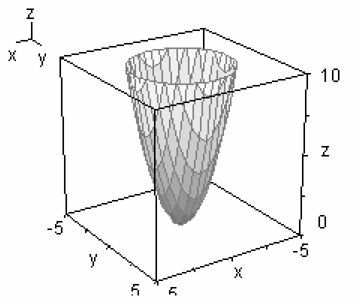
$$d = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2$$

Da haves:

1. lokalt minimum i P såfremt

   $d>0$ og $f_{xx}(x_0,y_0)>0$

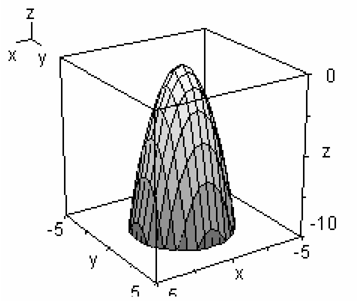
   (eller $f_{yy}(x_0,y_0)>0$)



2. lokalt maksimum i P såfremt

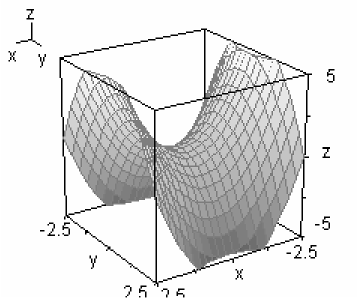
   $d>0$ og $f_{xx}(x_0,y_0)<0$

   (eller $f_{yy}(x_0,y_0)<0$)



3. et saddel punkt i P såfremt

   $d<0$



4. nærmere undersøgelse må foretages

   $d = 0$

Beviset er anbragt i appendiks sammen med sætningen om Taylorpolynomium i 2 variable.

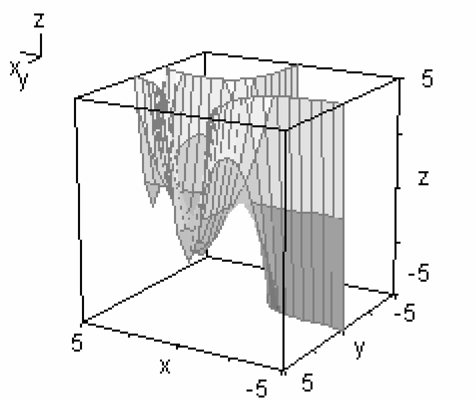
Eksempel 3.14

Derive

Lad funktionen f(x,y)=x²y+xy²–4xy være defineret for x∈[-1;2] og y∈[0;3].
Vi ønsker at bestemme værdimængden for funktionen og eventuelle ekstremums steder lokale som globale.

#1: $f(x, y) := x^2 \cdot y + x \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y$

Grafisk ses funktionen her i et større område end definitionsmængden.



De første ordens afledede bestemmes

#2: $\frac{d}{dx} (x^2 \cdot y + x \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y)$

#3: $2 \cdot x \cdot y + y^2 - 4 \cdot y$

#4: $\frac{d}{dy} (x^2 \cdot y + x \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y)$

#5: $x^2 + x \cdot (2 \cdot y - 4)$

Vi definerer nogle faste udtryk for disse to afledede. {det har den fordel at funktionsværdier nemt kan beregnes}

#6: $fx(x, y) := 2 \cdot x \cdot y + y^2 - 4 \cdot y$

#7: $fy(x, y) := x^2 + x \cdot (2 \cdot y - 4)$

CAS programmerne løser nemt flere ligninger. Det er ikke altid enkelt i hånden !
Derive finder følgende stationære punkter:

#8: $SOLVE(2 \cdot x \cdot y + y^2 - 4 \cdot y = 0 \wedge x^2 + x \cdot (2 \cdot y - 4) = 0, [x, y], Real)$

#9: $\left(x = \frac{4}{3} \wedge y = \frac{4}{3}\right) \vee (x = 4 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 4) \vee (x = 0 \wedge y = 0)$

Det er kun det første og det sidste punkt, der er indeholdt i definitionsmængden.
Vi finder dernæst de 2. ordens afledede.

#10: $\frac{d}{dx} (2 \cdot x \cdot y + y^2 - 4 \cdot y)$

#11: $2\cdot y$

#12: $\dfrac{d}{dy}(x^2 + x\cdot(2\cdot y - 4))$

#13: $2\cdot x$

#14: $\dfrac{d}{dy}(2\cdot x\cdot y + y^2 - 4\cdot y)$

#15: $2\cdot x + 2\cdot y - 4$

Vi definerer ligeledes nogle faste udtryk for disse tre 2.ordens afledede.

#16: fxx(x, y) := 2•y

#17: fyy(x, y) := 2•x

#18: fxy(x, y) := 2•x + 2•y − 4

Vi beregner nu d for det stationære punkt (4/3,4/3), idet vi har:

#19: $\text{fxx}\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

#20: $\dfrac{8}{3}$

#21: $\text{fyy}\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

#22: $\dfrac{8}{3}$

#23: $\text{fxy}\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)^2$

#24: $\dfrac{16}{9}$

Vi beregner nu d vha. formlen i sætningen $d = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2$

#25: $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{8}{3} - \dfrac{16}{9}$

der kan afrundes til

#26: $\dfrac{16}{3}$

Dette er værdien af d. Den ses at opfylde d>0 og da fxx(x,y)>0 ses at der er tale om et relativt minimum i dette punkt.

Vi beregner nu funktionsværdien i dette punkt

#27: $f\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

#28: $-\dfrac{64}{27}$

#29: -2.37037037

Denne værdi skal nu sammenlignes med funktionsværdierne på randen af definitionsmængden for f(x,y).
Vi kunne nu også undersøge det andet stationære punkt (0,0) i definitionsmængden, men da det ligger på randen, vil det automatisk blive inddraget i forbindelse med randundersøgelsen som følger her:

Vi kigger først på funktionsværdierne af funktionen f(x,y) langs med x-aksen (her er y=0)

#30: $f0(x) := x^2\cdot 0 + x\cdot 0^2 - 4\cdot x\cdot 0$

#31: 0

Vi finder at funktionsværdien her er lig nul for alle x-værdier.

Vi kigger nu på funktionsværdierne af funktionen f(x,y) parallelt med x-aksen hvor y=3

#32: $f3(x) := x^2\cdot 3 + x\cdot 3^2 - 4\cdot x\cdot 3$

Denne funktion underkastes en almindelig funktionsundersøgelse i intervallet [-1;2] og max og min bestemmes:

Vi finder først punkterne med vandrette tangenter

#33: SOLVE(f3’(x) = 0, x, Real)

#34: $x = \frac{1}{2}$

For x=1/2 er der vandret tangent. Vi udregner funnktionsværdierne for denne x-værdi samt
i endepunkterne x=-1 og x=2

#35: $f3\left(\frac{1}{2}\right)$

#36: $-\frac{3}{4}$

#37: $f3(-1)$

#38: 6

#39: $f3(2)$

#40: 6

Vi husker nu funktionsværdierne til senere sammenligning og undersøger nu funktionsværdierne til f(x,y) langs linien x=-1 , her haves idet vi starter med at rense de variable x og y.

#41: x :=

#42: y :=

#43: $fv(y) := (-1)^2\cdot y + (-1)\cdot y^2 - 4\cdot(-1)\cdot y$

#44: $5\cdot y - y^2$

#45: SOLVE(fv’(y) = 0, y, Real)

#46: $y = \frac{5}{2}$

y=5/2 falder indenfor definitionsmængden.
Vi udregner derfor funktionsværdierne for y=0 , y=5/2 , y=3 {endepunkter og vandret tangent}

#47: $fv(0)$

#48: 0

#49: $fv\left(\frac{5}{2}\right)$

#50: $\frac{25}{4}$

#51: fv(3)

#52: 6

Vi husker endvidere disse funktionsværdier og kigger til sidst på funktionsværdierne til f(x,y) langs linien x=2 , her haves idet vi igen starter med at rense de variable x og y.

#53: x :=

#54: y :=

#55: $fh(y) := 2^2 \cdot y + 2 \cdot y^2 - 4 \cdot 2 \cdot y$

#56: $2 \cdot y^2 - 4 \cdot y$

#57: SOLVE(fh′(y) = 0, y, Real)

#58: $y = 1$

Denne y-værdi er indeholdt i definitionsmængden. Vi beregner derfor funktionsværdierne for y=0 , y=1 , y=3

#59: fh(0)

#60: 0

#61: fh(1)

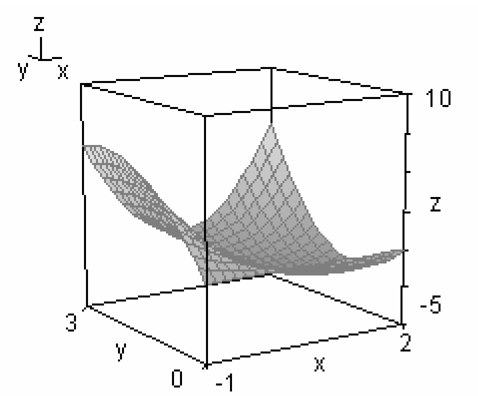
#62: -2

#63: fh(3)

#64: 6

Ved at sammenligne samtlige udregnede funktionsværdier ses; at f(x,y) har globalt minimum i (4/3;4/3) med funktionsværdien -64/27 , og at f(x,y) antager en maksimumværdi i punktet (-1;5/2) med værdien 25/4. Værdimængden for f(x,y) er derfor givet ved intervallet [-64/27;25/4].

Vi plotter nu f(x,y) indenfor definitionsmængden.



Grafisk ser det ud til at stemme overens med vores algebraiske undersøgelse.

Øvelse 3.15
Find de fem stationære punkter til funktionen $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4x^2 - 8y^2$ og afgør for hvert, om det handler om lokalt maksimumpunkt, lokalt minimumpunkt eller lokalt saddelpunkt.
Bestem dernæst globalt maksimum og minimum for f(x,y) i mængden $B=\{0\leq x\leq 4 \wedge -4\leq y\leq 4\}$.

Øvelse 3.16
Lad funktionen f være defineret i mængden $D=\{(x,y)|\ y \geq 0 \ \wedge\ y^2 \leq x \leq 4\}$ og givet ved $f(x,y) = x^3y+3(xy)^2-5x^2y$.
Bestem globalt minimum for funktionen.
(Vink; tegn definitionsmængden og opskriv funktionsudtryk for f langs randen af definitionsmængden – dette skulle gerne blive funktioner af en variabel.)

Eksempel 3.17
Afstanden fra punktet P(0,1,-1) til planen α: 2x+3y+z=1
kan vises at svare til at bestemme mindsteværdien for funktionen

$$f(x,y) = x^2+(y-1)^2+(2-2x-3y)^2$$

De partielle afledede bestemmes til

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x + 12y - 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x + 20y - 14$$

Eneste stationære punkt findes til $\left(\frac{-2}{14}, \frac{11}{14}\right)$
og her finder vi funktionsværdien

$$f\left(\frac{-2}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Dette er den mindste afstand mellem punktet P og planen α.

Øvelse 3.18
Eftervis påstandene fra eksempel 3.17 ved bl.a. at udnytte afstandsformlen og ved at udnytte proceduren til at bestemme minimum.

Øvelse 3.19
Vis at for et vilkårligt rektangel med en given omkreds p, så har kvadratet det største areal.

Kapitel 4

Taylorpolynomier i en og to variable.
For en funktion f(x,y) ønsker vi at bestemme et andengradspolynomium P(x,y), der tilnærmer f(x,y) godt nær et punkt (x_0,y_0). Der skal gælde, at $f(x_0,y_0)=P(x_0,y_0)$, og at de partielle afledede til og med 2.orden i punktet (x_0,y_0) skal have samme værdi.
Dette er analogt til at tilnærme en funktion i en variabel med et 2. gradspolynomium. Lad os derfor starte med at kigge lidt på Taylorpolynomier til funktioner af 1 variabel.

Eksempel 4.1
Vi ønsker at tilnærme funktionen f(x)=cos(x) med et 2. gradspolynomium i punktet (0,0).

Vi benytter Derive og indtaster vores funktion

```
#1:   f(x) := COS(x)
```

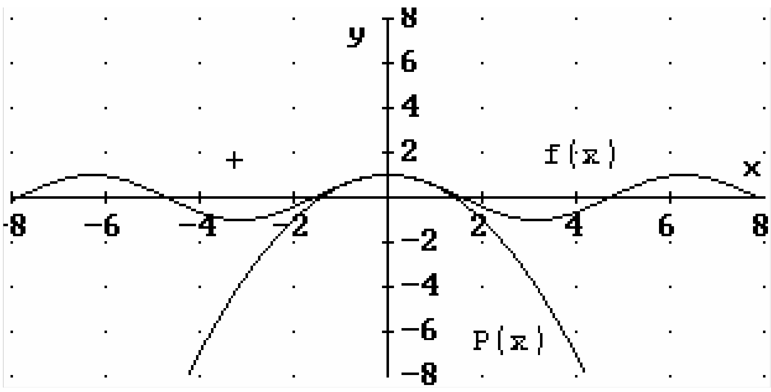
Her efter vælger vi Taylor under Calculus fanen

```
#2:   TAYLOR(f(x) := COS(x), x, 0, 2)
```

#3: $$1 - \frac{x^2}{2}$$

$P(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ er således det 2.ordens Taylorpolynomium, der tilnærmer cos(x) bedst i punktet (0,0).

Vi plotter f(x) og P(x) og konstaterer at det ser fornuftigt ud.



Et lille eksperimentelt CAS forløb om Taylorpolynomier for funktioner af 1 variabel.

Opgave 1 *(løses uden brug af grafisk lommeregner og computer)*
Tegn funktionen cos(x) for $x \in [-8,8]$ i et koordinatsystem.
Bestem det approksimerende førstegradspolynomium til cos(x) i punktet med x-koordinat $\pi/2$.

Opgave 2
Løs opgave 1 ved brug af dit CAS værktøj.
Begynd med at indtaste funktionen cos(x) og tegn dens graf.

I Derive gøres følgende:
Vælg Tile, så både grafvindue (GV) og algebravindue (AV) kan ses.
Skift til AV , vælg Calculus - Taylor Series - med variable x og expansion point π/2 og order 1.
Resultatet plottes i GV. Du skulle nu gerne have løst opgave 1 igen !

Opgave 3
Tegn grafer af cos(x) og følgende Taylorpolynomier i samme plot:

I. med udviklingspunkt point 0 og orden 1.
II. med udviklingspunkt point 0 og orden 2.
III. med udviklingspunkt point 0 og orden 3.

Opgave 4
Giv en begrundelse for at romertal II og III giver samme resultat.

Opgave 5
Lav et plot af cos(x), og plot i samme vindue graferne for Taylorpolynomierne med udviklingspunkt 0 og henholdsvis orden 4, 8, 16 og 32.
Zoom ud nogle passende gange.

Opklarende spørgsmål :
Hvor mange nulpunkter harTaylorpolynomiet af 32.orden ?
Beregn den relative forskel mellem Taylorpolynomiet og cos(x) for henholdsvis x = 4 og x =9 kommenter ?
Forsøg nu med expansion point 0 og order 80 og plot.

Opgave 6
Ved tilpas stort valg af order(orden) går maskinen måske ned. Men prøv om du kan opstille et slags aksiom om sammenhængen mellem antallet af nulpunkter for Taylorpolynomierne for cos(x) og orden.

Opgave 7
Giv først et kvalificeret gæt på, hvad der ville ske med Taylorpolynomiet af 2. orden, hvis vi i stedet for 0 valgte π som udviklingspunkt for funktionen cos(x). Prøv dernæst med dit CAS værktøj - overvej resultatet.

Opgave 8
Skitsér på papir et kvalificerende gæt på, hvordan Taylorpolynomiet af 1.orden med udviklingspunkt 0 til funktionen sin(x) kunne se ud.
Nu prøves sin(x) af med udviklingspunkt 0 og orden 2, 3, 20, 40. Det samme afprøves for udviklingspunktet π/2.
Overvej resultatet.

Opgave 9
Plot nogle Taylorpolynomier til funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ med henholdsvis udviklingspunkt 0 og 1.
Hvordan går det, når udviklingsordenen øges ?
Hvad forstås ved et konvergensinterval ?
se appendiks for maple session om denne opgave.

Vi vil nu kigge på Taylorpolynomier for funktioner af 2 variable.

Sætning 4.2
Lad f(x,y) have partielle afledede af 1. og 2. orden i punktet (x_0,y_0). Da findes der netop et polynomium P(x,y) af højst 2. grad, der i punktet (x_0,y_0) har samme værdi og partielle afledede af 1. og 2. orden som f. Dette polynomium, der kaldes det 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt (x_0,y_0), er givet ved

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + [\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)]$$

$$+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)]$$

Bevis
Ethvert polynomium af 2. grad kan skrives

$P(x,y) = a_0+b_1(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_1(x-x_0)^2+c_2(y-y_0)^2+c_3(x-x_0)(y-y_0)$

Vi finder ved differentiation

$$\frac{\partial P}{\partial x} = b_1 + 2c_1(x-x_0) + c_3(y-y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = b_2 + 2c_2(y-y_0) + c_3(x-x_0)$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2c_1$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2c_2$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = c_3$$

I ligningerne ovenfor indsættes betingelserne
$P(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$
og man finder, at koefficienterne a_0, b_1 ….c_3 er entydigt bestemt.
For eksempel findes

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

Det overlades til læseren at verificere de øvrige koefficienter.
Kravene opfyldes således netop af et polynomium og sætningen er bevist!

Visualisering:
For funktioner af 1 variabel er Taylorpolynomier af 2. orden således approksimationer med 2. gradspolynomier til en funktion og de kan angives med forskriften $p(x) = ax^2+bx+c$.
For funktioner af 2 variable kan forskriften for et 2.gradspolynomium angives på formen
$P(x,y) = Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F$ og der er tre muligheder for udseendet af et 2. gradspolynomium:
- en skål der vender opad
- en skål der vender nedad
- en saddel

Øvelse 4.3
Tegn ved hjælp af dit CAS værktøj tre 2.gradspolynomier af to variable svarende til hver af de tre muligheder for udseendet af grafen som beskrevet ovenfor.
Angiv værdierne for konstanterne A,B,C,D,E,F.

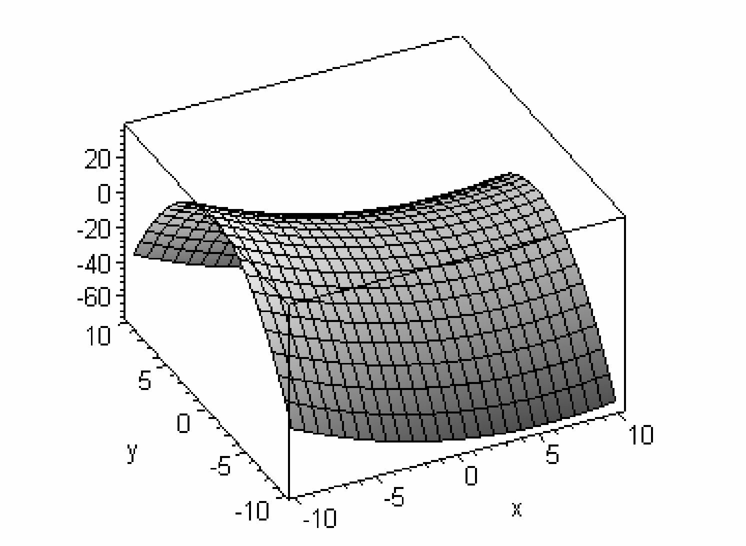
Eksempel 4.4
Maple
I Maple kan man benytte kommandoen mtaylor til at bestemme Taylorpolynomiet direkte (bemærk at orden skal angives som 3, når man ønsker orden 2, hvilket er en Maple finurlighed).

Vi approksimerer funktionen $f(x,y)=\dfrac{9x}{x^2+y^2+1}$ med udviklingspunkt (2,0)

```
> mtaylor((9*x/(x^2+y^2+1)), [x=2,y=0], 3);
```

$$\frac{144}{25}-\frac{27}{25}x+\frac{18}{125}(x-2)^2-\frac{18}{25}y^2$$

```
> plot3d(144/25-27/25*x+18/125*(x-2)^2-18/25*y^2,x=-10..10,y=-10..10);
```



Øvelse 4.5
Plot funktionen f(x,y) = $(1+x^2+y^2)\cdot\exp(1-x^2-y^2)$
Bestem Taylorpolynomiet til funktionen med udviklingspunkt (0,0).
{Vink: Såfremt dit CAS værktøj ikke understøtter Taylorpolynomier i 2 variable er du nødt til at benytte udtrykket fra sætningen om det 2. Taylorpolynomium for f med udviklingspunkt (x_0,y_0).}

Øvelse 4.6
Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x,y) = x^3+y^3+3x^2-18y^2+81y+5$$

Plot funktionen, og bestem dernæst Taylorpolynomiet af 2. orden med udviklingspunkt (1,1).
Beregn dernæst forskellen mellem Taylorpolynomiet og f i punktet (11/10,11/10).

Appendiks 1

Beviset for sætning 3.13
Idet koordinatsystemet altid kan forskydes, så begyndelsepunktet falder i $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, kan vi antage, at f(x,y) har det stationære punkt (0,0), og at f(0,0)=0. Vi sætter endvidere

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad , \quad B=2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad , \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

f(x,y) tilnærmes med Taylorpolynomiet P(x,y) af 2. orden med udviklingspunkt i (0,0)
Vi har da

$$P(x,y)=\frac{1}{2}(Ax^2+Bxy+Cy^2) \quad ,$$

idet vi har udnyttet, at f(0,0) = 0 , $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Vi omskriver til

$$P(x,y)=\frac{1}{2}y^2[A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C] \quad \text{for} \quad y\neq 0$$

$$P(x,y)=\frac{1}{2}x^2[C\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\left(\frac{y}{x}\right)+A] \quad \text{for} \quad x\neq 0$$

Det ses, at i begge tilfælde (henholdsvis $y\neq0$ og $x\neq0$) indeholder de kantede parenteser et andengradspolynomium med diskriminanten $D=B^2-4AC$.

Vi har da følgende tre tilfælde:

I. D<0, andengradspolynomiet i den kantede parentes har ingen rødder, så P(x,y) må have samme fortegn for alle $(x,y)\neq(0,0)$ så enten
positiv for A>0, og P har lokalt minimum i (0,0)
eller
negativ for A<0, og P har lokalt maksimum i (0,0).

II. D>0, andengradspolynomiet i den kantede parentes har 2 rødder, så P(x,y) vil antage både negative som positive værdier vilkårligt på (0,0), dvs. P har ikke lokalt ekstremum i (0,0). *Saddelpunkt.*

III. D=0, så enten er A=0 og B=0 eller $A\neq0$ og $C=\frac{B^2}{4A}$ og dermed fås
enten

$$P(x,y)=\frac{1}{2}(Ax^2+Bxy+\frac{B^2}{4A}y^2)=\frac{1}{2}A(x+\frac{B}{2A}y)^2 \qquad \text{for } A\neq 0$$

eller

$$P(x,y)=\frac{1}{2}Cy^2 \qquad \text{for } A=0$$

Det ses at på linien $x=\frac{-B}{2A}y$ eller linien y=0 vil Taylorpolynomiet P(x,y) af anden orden være nul.
Og da P(x,y)=0 ikke nødvendigvis medfører at f(x,y)=0 , er en nærmere undersøgelse påkrævet.

Beviset er nu fuldendt, idet resultaterne for P under punkt I. og II. kan vises at kunne overføres til at gælde for f ved at udnytte, at de partielle afledede er kontinuerte.

Maple til opgave 9 i det eksperimentelle forløb om Taylorpolyomier:

```
> restart:with(plots):
> P5:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=0],6);
> P6:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=0],7);
> P20:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=0],21);
```

som plottes:

```
> PL1:=plot(1/(1+x^2),x=-2..2,-1..4,color=red):
> PL5:=plot(P5,x=-2..2,-1..4,color=green):
> PL6:=plot(P6,x=-2..2,-1..4,color=blue):
> PL20:=plot(P20,x=-2..2,-1..4,color=black):
> display(PL1,PL5,PL6,PL20);
```

Vi prøver med x=1 som udviklingspunkt:

```
> P5A:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=1],6);
> P6A:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=1],7);
> P20A:=mtaylor(1/(1+x^2),[x=1],21);
> PL1A:=plot(1/(1+x^2),x=-2..2,-1..4,color=red):
> PL5A:=plot(P5A,x=-2..2,-1..4,color=green):
> PL6A:=plot(P6A,x=-2..2,-1..4,color=blue):
> PL20A:=plot(P20A,x=-2..2,-1..4,color=black):
> display(PL1A,PL5A,PL6A,PL20A);
```

Appendiks 2

Grænseværdi og kontinuitet.
Den præcise definition for grænseværdi er som følger:
$f(x,y) \to a$ for $(x,y) \to (x_o,y_o)$, hvis og kun hvis følgende gælder: For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at det for alle (x,y) i definitionsmængden gælder, at
$0 < |(x,y)-(x_o,y_o)| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-a| < \varepsilon$.

Dette kan mere løst udtrykkes således: hvis f(x,y) er vilkårlig tæt på a, blot (x,y) er tilstrækkelig tæt på x_o, så siger vi, at f(x,y) har grænseværdien a for (x,y) gående imod (x_o,y_o).

Det kan vises, at de sædvanlige regneregler for grænseværdi direkte kan overføres til funktioner af to variable.

Øvelse A2.1
Opstil de fire regneregler (+,–,·,:) for regning med grænseværdier (udnyt evt. din lærebog for funktioner af en variabel.)

Øvelse A2.2
Undersøg $\dfrac{x+2y}{xy}$ for $(x,y) \to (1,3)$
(Vink: Benyt lim kommandoen i CAS)

Øvelse A2.3
Bestem $\lim_{(x,y)\to(2,4)}(x^2 + xy + y^2)$

Den **formelle definition af kontinuitet** er som følger:
Lad f(x,y) være en reel funktion af 2 variable, og lad (x_o,y_o) være et punkt i definitionsmængden. f er da kontinuert i (x_o,y_o), såfremt

$$f(x,y) \to f(x_o,y_o) \quad \text{for} \quad (x,y) \to (x_o,y_o).$$

Hvis f er kontinuert I hele sin definitionsmængde, da siges f at være kontinuert.

Tolkning.
Geometrisk kan man tænke på kontinuerte funktioner som funktioner, hvor grafen ikke er brudt. Dvs. hvis man spadserer rundt i et område på grafen, så må man ikke blive udsat for et pludseligt spring.

Eksempel A2.4
Funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{y-x^2}$ er kontinuert i alle punkter bortset fra punkterne der ligger på parablen $y=x^2$.

Øvelse A2.5
Prøv at plotte funktionen i eksemplet ovenfor i et 3D plot, og se på, hvad der sker langs parablen $y=x^2$ i definitionsmængden.

Øvelse A2.6

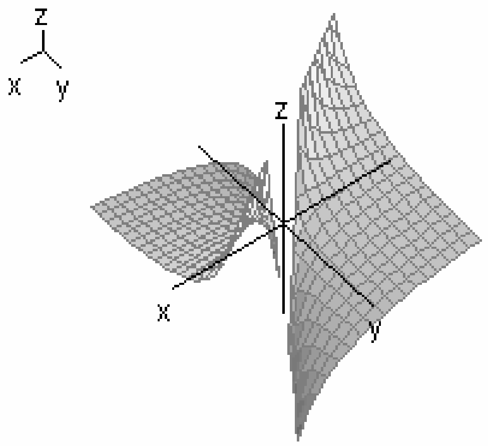
Lad funktionen f være givet ved $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ for (x,y)≠(0,0) og f(x,y)=k for (x,y)=(0,0).

Bestem konstanten k sådan, at funktionen er kontinuert i (0,0).

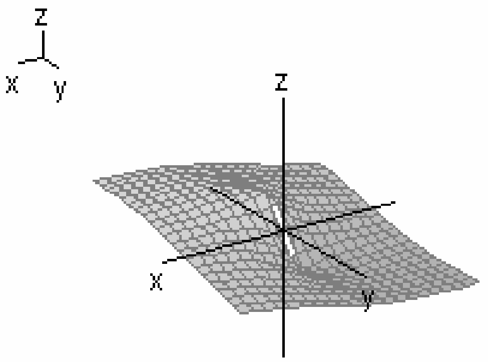
Øvelse A2.7

Undersøg grænseværdien af funktionerne p, g, h, w, q for (x,y)→(0,0) såfremt grænseværdien eksisterer.

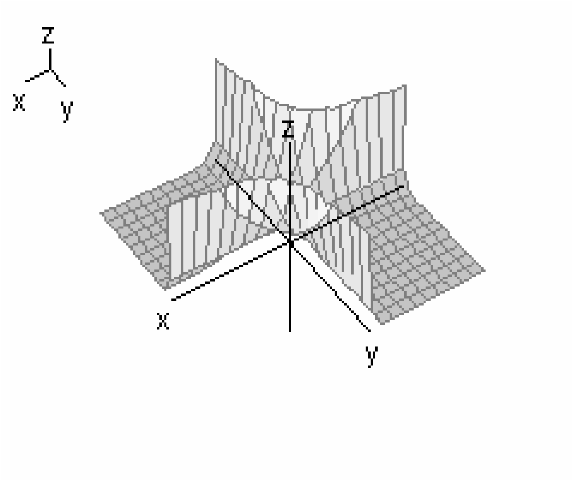
p(x,y)= $\dfrac{x+y}{x-y}$



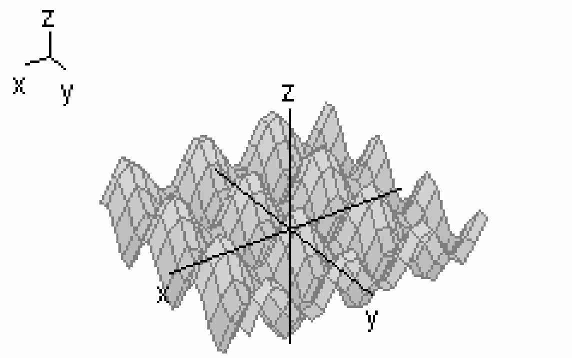
g(x,y)= $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



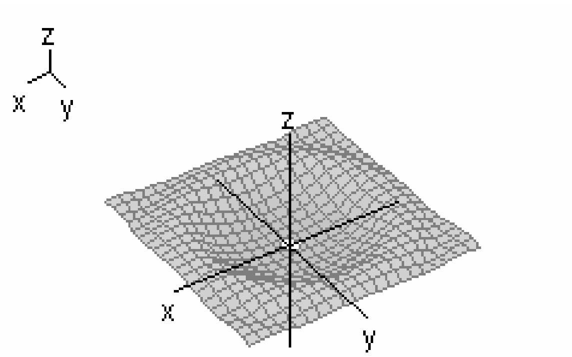
h(x,y)=exp(xy)



w(x,y)=sin(x)–cos(y)



q(x,y)=$1-\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$



SLUT !

Opgaver

1.
Tegn for hvert af følgende tilfælde en skitse af den angivne punktmængde A, det indre A°, randen ∂ A og afslutningen $\overline{A}$.
Undersøg endvidere, om A er åben, lukket eller ingen af delene.
Angiv om A er begrænset eller ej.

I. $\{(x,y) \mid xy \neq 0\}$

II. $\{(x,y) \mid 0<x<3 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$

III. $\{(x,y) \mid 0<x<y\}$

2.
Undersøg i hvert af følgende tilfælde, om definitionsmængden er sammenhængende.

I. $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

II. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{1-x}$

3.
Tegn for hver af nedenstående funktioner f niveaukurver givet ved f(x,y)=c for de angivne værdier af konstanten c.

I. $f(x,y) = x^2+y^2$, $c=1$, $c=2$, $c=3$, $c=4$

II. $f(x,y) = x^2-5x+y^2$, $c=-4$, $c=-2$, $c=0$, $c=1$

III. $f(x,y) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $c=-0{,}1$, $c=-0.5$, $c=-1$

4.
Lav et 3D plot af funktionen $f(x,y) = \exp(xy)$.
Skitsér nogle niveaukurver.

5.
Lad $f(x,y) = 5x^2-2xy+y^2$

I. Bestem de partielle afledede af f.

II. Bestem en ligning for tangentplanen i punktet (1,2).

6.
Lad $f(x,y) = x^3+x^2y++xy^2+y^3$

I. Bestem de partielle afledede af f.

II. Bestem en ligning for tangentplanen i punktet (1,2).

7.
Find den retningsafledede af funktionen $f(x,y) = x^2+xy^2+y^3$ i punktet (1,1) i retning af vektoren **u**=(1,0). Lav plots til illustration.

8.
Find den retningsafledede af funktionen $f(x,y) = x^2+xy^2+y^3$ i punktet (1,1) i retning af vektoren **u**=(1,1). Lav plots til illustration.

9.
Find den retningsafledede af funktionen $f(x,y) = x^2+y^3$ i punktet (1,1) i retning af vektoren **u**=(1,1).

10.
Find de stationære punkter for følgende funktioner og afgør, om der er maksimum, minimum, eller om det er et saddelpunkt.

I. $f(x,y) = 4x^2+2y^3-8xy+4$

II. $g(x,y) = \dfrac{18x}{x^2+y^2+1}$

III. $h(x,y) = \exp(xy)$

IV. $p(x,y) = xy+x-y$

V. $q(x,y) = (1+x^2+y^2)\cdot\exp(4-x^2-y^2)$

11.
Find globale ekstrema for funktionen

$f(x,y) = \sin(x) + 2\cos(y)$ defineret for $0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 5$.

12.
Find globale ekstrema for funktionen

$f(x,y) = x^2+xy+y^2$ defineret for $x^2+y^2 \le 1$.