

# **Evaluering af delprojektet *Matematik med CAS – matematik i 3.g del i projektet *Matematik og Naturfag i Verdensklasse II 2004-2006.****

Af Mette Andresen, juni 2006

## **Indhold:**

<b>1. Indledning.....</b>	<b>2</b>
<b>2. Mål og intentioner.....</b>	<b>3</b>
<b>3. Projektets delaktiviteter.....</b>	<b>5</b>
3.1 Konference på Eksperimentarium.....	5
3.2 Netværksmøder.....	6
3.3 Udarbejdelse og afprøvning af materiale.....	7
3.4 Introduktion til Datameter.....	8
<b>4. Midtvejsstatus juni 2005.....</b>	<b>9</b>
<b>5. Lærernes årsrapporter 2006.....</b>	<b>12</b>
<b>6. Erfaringer fra gennemførelsen af projektet.....</b>	<b>13</b>
6.1 Deltagernes umiddelbare opfattelse.....	13
6.2 Indholdet i projektet.....	14
6.3 Hvordan har undervisningen udviklet sig.....	18
6.4 Hvad skal der ske som det næste.....	18
<b>7. Undervisningsmateriale.....</b>	<b>19</b>
<b>8. Konklusioner og perspektiver.....</b>	<b>21</b>
8.1 Lærernes kompetenceudvikling.....	21
8.2 Dannelse af netværk mellem skoler.....	22
8.3 Nye undervisningsmål.....	23
8.4 Kvalitative løft i undervisningen.....	23
<b>9. Referencer.....</b>	<b>24</b>

## **1. Indledning**

Nærværende rapport indeholder en evaluering af delprojektet *Matematik med CAS*, som er del i projektet *Matematik og Naturfag i Verdensklasse II*, der forløb i perioden 2004 – 2006.

Det forudgående projekt, *Matematik og Naturfag i Verdensklasse I*, der forløb i perioden 2000 – 2004, er udførligt omtalt i (Andresen og Thorslund 2005). Delprojektet *Matematik med CAS* er en videreførelse af et delprojekt i *Matematik og Naturfag i Verdensklasse I* for indsatsområde A, *Matematik på højt niveau i gymnasiet*, som er udførligt beskrevet i (Andresen 2006) og evalueret i (Andresen, Pawlik og Winther 2004).

Denne evalueringsrapport er udarbejdet af Cand. Scient. Ph.d. Mette Andresen, adjunkt på Danmarks Pædagogiske Universitet, efter aftale med projektledelsen i projektet *Matematik og Naturfag i Verdensklasse*. Der er således tale om en intern evaluering, for så vidt som den er bestilt og finansieret af projektet selv.

Formålet med evalueringen er at opsamle og kritisk vurdere de erfaringer der er gjort i delprojektet. Ifølge aftalen mellem parterne skal evalueringen ”..beskrive delprojektets aktiviteter og præsentere relevante refleksioner over disse, såvel fra deltagernes som fra et teoretisk didaktisk lærerudviklings synspunkt. Evalueringen skal omfatte en vurdering heraf i relation til de opstillede mål for delprojektet samt i relation til de overordnede mål for Mat Nat Verdensklasse projektet.”

Deltagernes refleksioner er indfanget ved en times gruppeinterview 2. maj 2006 med 10 af de deltagende lærere og 45 minutters gruppeinterview 4. april 2006 med 6 deltagende elever, samt ved observation af i alt 15 lektioner på 5 af de deltagende skoler. Observationerne og gruppeinterviewene blev gennemført af Mette Andresen i perioden 6. februar – 1. maj 2006. Gennem hele projektperioden har de deltagende skoler været tilmeldt en virtuel konference i *Skolekom*<sup>1</sup>. Lærerne fra hver af de deltagende skoler har ved skoleårets afslutning lagt en årsrapport på skolekom konferencen. I alt blev sendt 8 årsrapporter i 2005 og 7 årsrapporter i 2006.

Mails og andet materiale fra denne skolekom-konference, herunder lærernes årsrapporter, samt materiale fra projektets hjemmeside<sup>2</sup> indgår som underlag for evalueringen. Desuden indgår 12 læreres svar på en lille spørgeskema undersøgelse, gennemført af Mette Andresen ved skoleårets afslutning 2005, samt det generelle indtryk fra erfarings-udvekslingsrunderne og den uformelle snak på de 12 netværksmøder og i forbindelse med observationsbesøgene på skolerne.

---

<sup>1</sup> Skolekom er et netbaseret, landsdækkende kommunikationssystem for undervisere og studerende på alle niveauer i uddannelsessystemet, med postfunktioner og åbne og lukkede virtuelle konferencestrukturer.

<sup>2</sup> [www.matnatverdensklasse.dk](http://www.matnatverdensklasse.dk)

## **2. Mål og intentioner**

Det fremgår af følgende uddrag af projektbeskrivelsen<sup>3</sup> for *Matematik og Naturfag i Verdensklasse*, at det overordnede mål var at øge interessen for matematik og naturvidenskabelige fag, at sætte fokus på matematisk og naturvidenskabelig almindelse og at motivere de unge for en teknisk-naturvidenskabelig uddannelse. Lærernes kompetenceudvikling var også et mål, samt dannelsen af et netværk mellem skoler i hovedstadsområdet som ramme blandt andet for samarbejde med fagdidaktiske forskere.

### **Baggrund**

Formålet med *Matematik og naturfag i verdensklasse* er

- at øge interessen for matematik og naturvidenskabelige fag
- at sætte fokus på matematisk og naturvidenskabelig almindelse
- at motivere unge for en teknisk-naturvidenskabelig uddannelse

Projektets mission er at udvikle nye undervisnings- og læringsmetoder og nye undervisningsmaterialer på grundlag af fagdidaktiske forskningsresultater og nye fagligt pædagogiske ideer.

Lærernes kompetenceudvikling er en integreret del af projektet og støttes gennem afholdelse af kurser, seminarer og konferencer.

Projektet etablerer netværk af skoler i Hovedstadsregionen, som er rammen om et samarbejde mellem fagdidaktiske forskere og praktikere i skolen. Universiteter, institutioner og virksomheder knyttes til netværket gennem aftaler omkring bestemte forsknings- og udviklingsprojekter.

### **Matematik og naturfag i verdensklasse II**

Projekt *Matematik og naturfag i verdensklasse* fortsætter i skoleårene 2004/05 og 2005/06 med fem delprojekter:

1. Naturvidenskab for alle – fysik i 1.g
2. Nanoteknologi i gymnasiet – fysik og kemi i 2.g
3. Matematik med CAS – matematik i 3.g
4. Naturvidenskab for alle, et tværfagligt projekt – biologi, fysik/kemi og geografi i 8. kl
5. Overgangsprojekt – fra natur/teknik i 6. kl til biologi, fysik/kemi og geografi i 7. kl

### **Forprojekter**

Med hensyn til de tre førstnævnte delprojekter er der iværksat et forberedende arbejde med henblik på at udvikle undervisningsmateriale til modelforløb inden for hvert delprojekt.

Et modelforløb skal omfatte 10-20 timers undervisning, og undervisningsmaterialet skal følges op af pædagogiske overvejelser (lærervejledning, kurser o.l.). Materialet skal være web-baseret, fx placeret på de intranet, som amter og kommuner er ved at etablere som forberedelse til "det virtuelle gymnasium". På nettet skal der være en hovedtekst på 10-20 sider, som kan downloades fx i pdf-format. Desuden skal der være række forslag til supplerende aktiviteter: Opgaver, eksperimenter, supplerende læsning ...

Undervisningsmaterialet testes i løbet af skoleåret 2003/2004 i et mindre antal klasser med henblik på at iværksætte egentlige udviklings- og forskningsprojekter fra skoleåret 2004/2005.

*1. Beskrivelsen på hjemmesiden af Matematik og Naturfag i Verdensklasse II*

<sup>3</sup>Findes på projektets hjemmeside

I delprojektet *Matematik med CAS* skulle der udvikles og afprøves web-baseret undervisningsmateriale, som udnyttede et CAS-værktøj mest muligt. Målet med delprojektet var at vise hvor langt man kan komme indenfor udvalgte emner med et CAS værktøj til rådighed. Materialet skulle lægge op til elevaktiverende arbejdsformer, og ved at tage udgangspunkt i materiale som var skræddersyet til et CAS-værktøj og gribe undervisningen an på en ny måde, skulle projektet undersøge om undervisningen kunne få et kvalitativt løft. Mulige ændringer i lærer-elev rollerne skulle også undersøges ([www.matnatverdensklasse.dk](http://www.matnatverdensklasse.dk)):

### **Matematik med CAS - matematik i 3.g**

Projektets mål er at udvikle og afprøve web-baseret undervisningsmateriale, hvor et CAS-værktøj udnyttes mest muligt. Formålet med projektet er at vise, hvor langt man kan komme inden for udvalgte emner, når et sådant værktøj er til rådighed. Materialet skal kunne anvendes i matematikundervisningen i 2.-3.g og dække 10-20 timers undervisning.

#### **Baggrund**

På grundlag af de brede erfaringer med brug af CAS i gymnasiets matematikundervisning, som er opsamlet gennem *Matematik og naturfag i verdensklasse* er det hensigten at gå i dybden med udvalgte områder af matematikken.

Der skal tilknyttes en didaktisk forsker, der ved at følge undervisningen og ved at interviewe lærere og elever skal undersøge, hvordan undervisningen ændres ved konsekvent at udnytte CAS. Projektet skal undersøge, om undervisningen kan få et kvalitativt løft, og om der kan flyttes på lærer/ elevrollerne, hvis undervisningen gribes an på en ny måde, og hvis der tages udgangspunkt i materiale, der er skræddersyet til et CAS-værktøj.

#### **Undervisningsmaterialet**

Der skal udarbejdes undervisningsmateriale til nogle traditionelle emner i gymnasiets matematikundervisning, hvor et CAS-værktøj udnyttes mest muligt. Materialet skal lægge op til mere elevaktiverende arbejdsformer. Materialet produceres af gymnasielærere i samarbejde med fagdidaktiske forskere. Mulige emner:

- Differentialligninger
- Sandsynlighedsregning
- Lineær programmering

#### **Forprojekt**

Der er iværksat et forprojekt omfattende et undervisningsforløb om differentialligninger med henblik på en afprøvning allerede i skoleåret 2003/04.

Materiale til dette emne er udviklet af Per H. Jensen, Vestre Borgerdyd Gymnasium, Børge Jørgensen, Helsingør Gymnasium, og Niels Hjersing, Himmelev Gymnasium. Mette Andresen, DPU, har ved nogle møder været med til at opstille nogle fokuspunkter til brug ved evalueringen af projektet.

Materialet er skrevet ud fra den forudsætning, at eleverne har matematikprogrammet *DERIVE* til rådighed, men andre programmer eller store CAS-lommeregnere vil også kunne bruges. Materialet dækker alle de emner, der hører til gymnasiets pensum inden for differentialligninger, men det lægger op til en meget anderledes undervisning. Computerens styrke udnyttes til alle ligninger og beregninger, hvorved der frigøres tid og kræfter til at arbejde med forståelsen af selve ligningerne og med at opbygge differentialligningsmodeller. Materialet lægger op til, at eleverne arbejder med større og mindre projekter, herunder tværfaglige projekter.

### **3. Projektets delaktiviteter**

Ligesom på de øvrige delprojekter omfattede *Matematik med CAS* både fælles aktiviteter for alle de deltagende lærere og individuelle aktiviteter på skolerne.

#### **3.1 Konference på Eksperimentariet**

Den 14. Marts 2006 blev den sidste åbne konference afholdt på projektet Matematik og Naturfag i Verdensklasse. Lige fra starten af projektets første runde blev der hvert andet år afholdt en konference for deltagerne, åben for alle andre interesserede, hvor projektets igangværende og afsluttede aktiviteter og resultater blandt andet blev præsenteret. Konferencerne var tænkt som et 'vindue' hvor udenforstående kunne få indblik i projektet. Programmet på den sidste konference var som følger:

Program	
09.30 - 10.00	Ankomst og registrering
10.00 - 10.15:	<i>Velkomst og indledning</i> v. rektor Carl P. Knudsen, Helsingør G.
10.15 - 11.00:	<i>Er naturfag relevant? Er naturvidenskab? (<a href="#">abstract</a>)</i> . Henrik Busch, Institut for Curriculumforskning, DPU
11.15 - 12.00:	<i>Brintpillen: forskning, innovation og undervisning, der går op i én helhed (<a href="#">abstract</a>)</i> Claus Hviid Christensen, Kemisk Institut, DTU
12.00 - 13.00:	Frokost
13.00 - 13.45:	<i>Undervisning i naturfag i folkeskolen - hvad er det der er bedre, når det er bedre. (<a href="#">abstract</a>)</i> . Keld Nielsen, Steno Institutet, ÅU
13.45 - 14.45:	Fire beretninger om projektet: <i>Gør viden en forskel - elevholdninger og elevargumenter</i> . Søren Kirchheiner, Randersgade Skole <i>Differentialligninger før og nu</i> . Per H. Jensen, Vestre Borgerdyd G., og Børge Jørgensen, Helsingør G. <i>Moderne teknologi/nanoteknologi</i> . Vibeke Foersom, Christianshavns G. <i>Naturvidenskabeligt grundforløb i praksis</i> . Karen Helmig, Helsingør G.
14.45 - 15.15:	Kaffe
15.15 - 16.00:	<i>Spektakulær naturvidenskab i undervisningen</i> DTU Science Show

3. Program for konferencen på Eksperimentarium 14. marts 2006

### 3.2 Netværksmøder

For at fremme idé- og erfaringsudvekslingen mellem projektets deltagere og skabe en ramme for formidling af input udefra i form af oplæg mv, stod delprojektlederen, lektor Anne Winther Petersen, for planlægning og afholdelse af en række netværksmøder for de deltagende lærere. Fra DPU deltog Mette Andresen i alle netværksmøderne, som forsker og evaluator.

#### *Skoleåret 2004 - 2005*

Der havde på statutidspunktet efter projektets første år, dvs i maj 2005, været afholdt 5 netværksmøder af 2-3 timers varighed og endnu ét var planlagt at finde sted 14. juni 2005 med opsummering af årets arbejde, velkomst til nye deltagere og planlægning af næste år.

De fem møder var:

- 15. juni 2004. Opstartmøde med idéer, alm snak og planlægning
- 4. okt 2004. Erfaringsudveksling. Oplæg: 'Hvad er de gode spørgsmål?' ved stud. Ph.d. Mette Andresen om, hvilke nye strategier eleverne udvikler når de bruger computer-rutiner, og hvordan læreren kan stille spørgsmål for at guide eleverne.
- 13. dec 2004. Erfaringsudveksling. Oplæg ved fagkonsulent Bjørn Grøn om eksamensforsøgene med CAS, dokumentation og bedømmelseskriterier.
- 7. feb 2005. Erfaringsudveksling. Præsentation af undervisningsmateriale ved Lærere fra Gl. Hellerup Gymnasium og Rungsted Gymnasium.
- 19. april 2005. Erfaringsudveksling. Oplæg om et computerstøttet didaktisk forskningsprojekt om modellering i matematik og fysik ved Dr. Michiel Doorman, Freudenthal Instituut, Utrecht.

#### *Skoleåret 2005 - 2006*

I projektets andet år blev der afholdt 6 møder, også af 2-3 timers varighed. Tre af disse havde et mere workshopagtigt præg med præsentation og efterfølgende afprøvning af programmet Datameter, som af projektet var indkøbt til de deltagende skoler. Disse tre møder foregik i computerafdelingen på Ishøj Gymnasium. To møder foregik på DPU med erfaringsudveksling, oplæg og efterfølgende diskussion under uformelle former med øst og rødvin. Det sjette og sidste møde, som igen blev afholdt på Ishøj Gymnasium, dannede rammen om et gruppeinterview beregnet for evalueringen af delprojektet og markerede i øvrigt afslutningen af projektet:

- 31. august 2005. Introduktion til programmer Datameter ved lektor Bjørn Felsager, Haslev Gymnasium
- 4. okt 2005. Arbejde med Datameter ved Bjørn Felsager
- 6. dec 2005. Erfaringsudveksling. Præsentation af ph.d. projekt: What does good use of objects to think with mean in mathematics? (Arbejdstitel) ved Mette Andresen

- 17. jan 2006. Arbejde med småopgaver i Datameter fra skolekom konferencen
- 31. jan 2006. Erfaringsudveksling. Oplæg om sammenligning af potentialer og muligheder i de tre programmer: Capri, Derive og GeoGebra, ved Dr. Armando Landa, Autonomy University Chapingo, Mexico. Oplæg om elevers brug af GeoGebra til løsning af studentereksamensopgaver ved lektor Gert Kreinøe og lektor Preben Jensen, begge Avedøre Gymnasium
- 2. maj 2006 gruppeinterview og afslutning

Erfaringsudvekslingen på møderne var meget konstruktiv og havde uformel karakter, med ost og rødvin. Omfanget af det øvrige faglige indhold svarede til mindst 1½-2 timer pr gang.

Der var 16-18 deltagere pr møde, svarende til et par afbud hver gang, fra forskellige deltagere. Diskussionerne var præget af åbenhed, engagement og udveksling af idéer, snarere end af behov for løsning af konkrete, opståede problemer.

### 3.3 Udarbejdelse og afprøvning af undervisningsforløb med CAS

Der blev begge år udarbejdet en omfattende samling undervisningsmateriale af meget varierende omfang og dækkende en bred vifte af emner. Dette materiale blev udvekslet via skolekom konferencen og i en del tilfælde diskuteret på netværksmøderne. En egentlig præsentation og analyse af dette meget righoldige materiale og brugen af det falder udenfor rammerne af nærværende rapport. De fleste af de behandlede emner er listet i det følgende for at illustrere bredden. Interesserede henvises i øvrigt til projektets hjemmeside.



*4. Elever i par-arbejde ved computerne*

Emner, der har været benyttet CAS til (i alfabetisk rækkefølge):

2004 - 2005

Differentialkvotient  
Differentialligninger, også numerisk

Egenskaber for parablen

Funktioner af to variable  
Grænseværdi og kontinuitet  
Kaosteori  
Klassisk geometri, plangeometri

Kryptologi  
Ligningsløsning  
Lineær programmering  
Monotoniforhold  
Polynomier, rødder, faktorisering og asymptoter

Regression og funktionspapir

Sandsynlighedsregning

Specielle funktioner;  
trigonometriske, eksponentielle  
og logaritme-

Stamfunktion, areal og andre  
anvendelser af integralregning

Uendelighedsbegrebet

Vektorer i to dimensioner

derudover, i 2005 – 2006

Binomialfordelingen

Deskriptiv statistik,  
normalfordeling og test

Eksperimentelle statistiske  
tests: 'scrambling' og  
'bootstrapping'

Fermat og plane kurver

Grafer og funktionsundersøgelse

Hypotesetest

Kurver (Arkimedes' spiral, Cykloide,  
Asteroide, Deltoide, Trisektricen)

Permutationstest

Perspektivtegning

Simulering af henfald

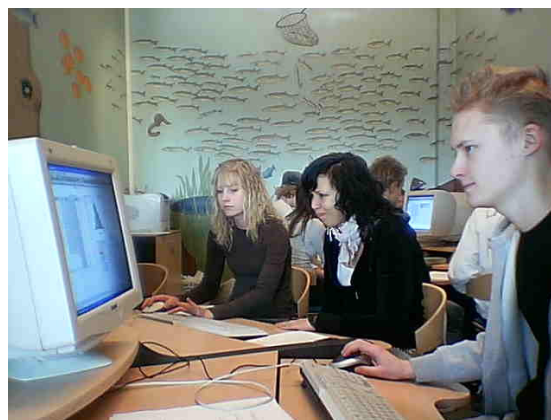
Statistiske tests

Tilfældig simulering

Vækstmodeller

### 3.4 Introduktion til og brug af Datameter

I skoleåret 2005 – 2006 var projektet stærkt præget af, at programmet Datameter var blevet indkøbt til skolerne. De deltagende lærere fik desuden udleveret et eksemplar pr. skole af: Ann E. Watkins, Richard L. Scheaffer og George W. Cobb (2004). *Statistics in Action. Understanding a world of data* Key Curriculum Press. Tre af netværksmøderne omhandlede, som omtalt ovenfor, brugen af Datameter. Dette smittede også af på emnevalget ved fremstillingen af nyt undervisningsmateriale, som det fremgår af ovenstående oversigt.



5. Elever der arbejder med Datameter



#### 4. Midtvejsstatus juni 2005

Det følgende er en sammenfatning af årsrapporter fra 8 hold og svar fra 12 lærere på en spørgeskemaundersøgelse gennemført på skolekom konferencen i februar – marts 2005.

##### *Det benyttede hard- og software, fordele og ulemper*

Der havde været brugt TI89 og stationære computere med Derive, GeoMeter Sketchpad og regneark (Excel og FPro).

Eleverne havde fået tilbudt at få Derive på deres computer hjemme.

Det blev fremhævet som en positiv facilitet, at man kan hente billeder af grafer og tabeller ind i Derive og arbejde videre der.

CAS lommeregneren er, i modsætning til computeren, bekvemt ved hånden og altid klar til brug. Elever kan dog også sagtens være hurtige til at smutte over i computerrummet og straks gå i gang.

CAS grafregneren er besværlig at bruge i forbindelse med grafer fordi de er besværlige at overføre til computeren og bliver grimme.

Det kunne i nogle tilfælde være svært at komme til computerne på grund af for stort pres på IT rummet på nogle skoler.

En lærer syntes det havde været en lettelse at undgå det praktiske og pædagogiske bøvvl med de bærbare computere og i stedet have (nok) tilgængelige stationære.

Det er en stor fordel hvis alle på holdet har samme værktøj – det gør det også lettere at introducere værktøjet for eleverne.

##### *Hvad benyttes CAS til?*

Opgaveregning og kontrol af resultater var gennemgående anvendelser. Små induktive forløb, hvor regneregler for differentialkvotient udledes på baggrund af eksempler blev nævnt. Undervisningen blev understøttet ved, at beregninger og omskrivninger blev foretaget ved hjælp af CAS, så fokus kunne fastholdes på de overordnede linjer.

En del lærere syntes at CAS havde givet dem god mulighed for at lave små induktive forløb, hvor eleverne selv skulle finde frem til sammenhænge og formulere formler eller regneregler. Dette fremgik også af listen over undervisningsmaterialerne fra skolekom konferencen. Her blev CAS værktøjet altså benyttet som undervisningsredskab med det formål at eleverne selv skulle opbygge en matematisk forståelse af et område.

En enkelt lærer nævnte, at læreren skulle turde lidt mere end ellers, fordi det ikke altid er til at vide hvor elevernes arbejde kan føre hen. De besvarelser der blev afleveret til åbne opgaver var mere forskellige end ellers.

Det gennemgående billede var, at CAS- regnerne blev brugt integreret i alle eller de fleste dele af undervisningen og ikke var forbeholdt specielle forløb eller arbejdssituationer. Det var tilsyneladende vanskeligere, men ikke umuligt at integrere brugen af stationære computere i fuld udstrækning, afhængigt af skolens computerkapacitet.

### *Fordele ved at bruge CAS*

Det var karakteristisk for brugen af CAS, at eleverne ikke sad fast i tekniske vanskeligheder. Det havde betydet, at de svage elever kunne komme længere i opgaverne og fik god hjælp til at lave pæne besvarelser. Desuden havde introduktion af nye emner gået hurtigere, så den overordnede forståelse kom på plads og eleverne hurtigt kunne arbejde med komplicerede opgaver. Det var den generelle opfattelse, at undervisningen kunne koncentreres om de overordnede idéer og problemstillinger fordi CAS klarede de regne- og andre teknisk dele, og at en del problemer og (for) stort tidsforbrug dermed kunne undgås. Den tid der derved blev indvundet kunne bruges på at træne uden hjælpemidler.

En lærer beskrev forholdene omkring brugen af CAS ved hjælp af en harmonikamodel: De dygtigste eller mest arbejdsomme elever havde fået langt den største fordel af CAS. De svageste elever havde dog også fået et løft, først og fremmest p.g.a. solve-faciliteten, der får eleverne til at nå længere i opgaverne. Den pågældende lærer havde ikke oplevet en eneste elev, for hvem CAS ikke havde været en fordel.

En del lærere delte den opfattelse at eleverne kunne 'skyde genvej' på den måde, at de hurtigt kunne vænne sig til at benytte nogle af CAS-værktøjets indbyggede rutiner i arbejdet med en problemstilling og dermed, for nogle men ikke alles vedkommende, efterhånden forstod selve det matematiske indhold.

Det blev nævnt af flere som en fordel, at der er mange flere emner som det er muligt at arbejde med når man har CAS. Oversigten over undervisningsmaterialerne fra skolekom konferencen og til dels ovenstående emneliste viser, at en del nye emner rent faktisk var blevet behandlet, men langt fra alle lærerne havde inddraget nye emner. Tilsvarende gælder for nye metoder til behandling af gamle emner, for eksempel grafiske eller numeriske metoder i stedet for analytiske.

Det blev også af flere nævnt som en fordel, at man let kan se mange eksempler og hurtigt lave diverse omskrivninger og skift mellem grafisk og analytisk repræsentation. Der bliver kortere mellem teori og praksis ved at det er let at skifte variabler og indsætte forskellige tal. Numeriske metoder for eksempel til løsning af differentialligninger havde givet anledning til realisering af flere tværfaglige samarbejdsprojekter, for eksempel med biologi, hvilket havde bragt matematikken tættere på virkeligheden.

### *Svagheder ved CAS brugen*

Eleverne kunne have sværere ved at huske formlerne end de ellers ville have haft.

En lærer havde regnet ud at eleverne scorede dårligere til prøven uden hjælpemidler ( i %) end til prøven med – er det mon normalt?

### *Elevernes og lærernes indstilling til at bruge CAS*

Der var tilsyneladende stor spredning på elevernes indstilling til at bruge CAS:

Nogle lærere talte om at prøve at få eleverne til at bruge det, for eksempel ved at lade dem regne samme eksamensopgave først uden, så med CAS så de kunne se, at de kunne komme længere med CAS. Et andet eksempel var en lærer der til næste år ville gøre mere ud af at overbevise sine elever om, at det er 'endnu finere' at kunne vælge det mest hensigtsmæssige værktøj til opgaven, end det er altid at gøre alt 'i hånden'.

Andre lærere havde oplevet at eleverne spontant og vedvarende var glade for at have CAS værktøjet.

Alle lærerne havde selv været glade for at have CAS værktøjet. Der var tilsyneladende ingen nævneværdige tekniske og praktiske ulemper i forbindelse med brugen af CAS, bortset fra eventuelle kapacitetsproblemer i skolens computerrum/IT rum.

### *Forhold omkring eksamen med CAS*

Det kunne være vanskeligt at få nogle elever til at bruge Derive hvis de ikke havde computer hjemme, fordi det ikke var et nødvendigt hjælpemiddel: Alle de eksamensopgaver eleverne skulle kunne løse kunne klares uden CAS. Nogle svage elever så det derfor som en ekstra belastning at skulle sætte sig ind i brugen af Derive.

Der blev udtrykt ønske om, at brugen af CAS i undervisningen bliver fulgt op af en revision af eksamen: Elever, for hvem brugen af CAS er endnu en hurdle, kan blive motiveret hvis det er en reel fordel at bruge CAS til eksamen. Der bør udvikles opgaver og evalueringskriterier der udnytter værktøjet bedre.

Der blev også udtrykt behov for en afklaring af, hvilke kompetencer eleverne egentlig forventes at udvikle, når brugen af CAS er obligatorisk.

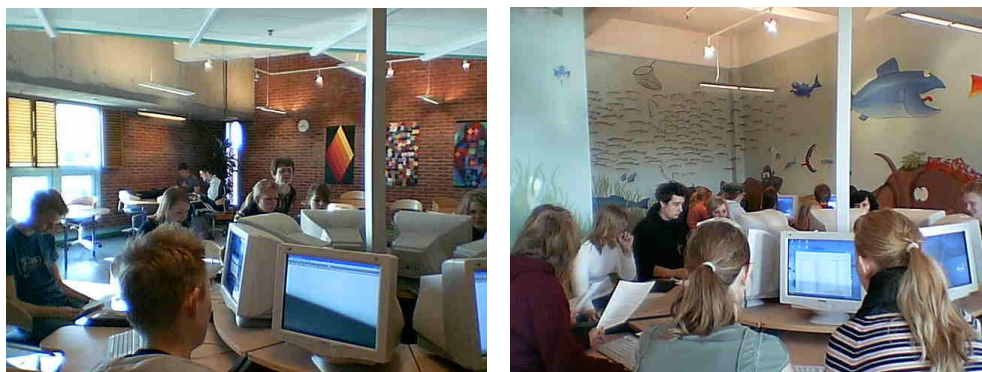
Lærerne berørte spørgsmål som:

- Skal/bør der ske en revision af pensum og krav til prøven uden hjælpemidler?
- Hvilke nye kompetencer skal eleverne prøves i, på bekostning af hvilke gamle?
- Vil man for eksempel teste elevkompetencer der vedrører valg af (CAS-) værktøj til løsning af en givet opgave?
- Kunne en af de nye kompetencer være sammenligning af resultater ved benyttelse af forskellige metoder eller modeller? Eller sammenligning af metoder eller modeller?

*Andre emner og forhold, som det er relevant at kolleger ude på skolerne får noget at vide om/som skal tages op ved evalueringen af projektet*

- Det tager tid for eleverne at lære CAS værktøjet at kende, og dette indhentes først ved brug af CAS efter flere forløb eller større projekter.
- Nogle elever skal tages meget i hånden hvis de ikke skal give op med hensyn til at lære værktøjet at kende.

- Der kræves en hel del forberedelse af læreren med at udarbejde CAS- materiale: Det viser sig ofte, at man ikke rigtig kan bruge andres undervisningsforløb direkte men må lave sine egne.
- Planlægning, reservation af EDB-lokale mv. tager også tid.



6. Elever ved computer 'øer'

#### *Andet*

Ingen af lærerne havde bemærket nogen større forskelligheder i drenges og pigers tilgang til brugen af CAS: En enkelt lærer nævnte at pigerne muligvis var en smule mere forbeholdne i starten.

Det var gennemgående, at CAS ikke var brugt til mundtlig eksamen, og der blev ikke nævnt så meget om hvordan CAS havde indgået i den mundtlige dimension i undervisningen.

Lærerne gav udtryk for tilfredshed med at have fået erfaringer i brug af CAS og med at have haft tid og lejlighed til at udveksle erfaringer med kollegerne.

En lærer skrev: *'Det er det sjoveste, der er sket i min undervisning i mange år.'*

### **5. Lærernes årsrapporter 2006**

Fra 2006 forelå der ved projektets afslutning årsrapporter fra syv skoler. Der er ikke nævneværdige ændringer og tilføjelser i forhold til de spørgsmål og emner som blev fremdraget i midtvejsstatus fra 2005. Fra flere af skolerne rapporteres, at året arbejde ikke adskiller sig væsentligt fra det foregående års.

#### *Det benyttede hard- og software*

På nogle hold havde eleverne brugt Voyage200, som var et dækkende CASværktøj med den store fordel at være ved hånden i alle timerne. Det havde dog de to velkendte ulemper ved håndholdte i forhold til PC: udskrivnings- og dokumentations problemet samt manglende motivation hos eleverne til at sætte sig ind i andre matematikprogrammer.

På de hold hvor eleverne brugte PC var det i modsætning hertil almindeligt, at eleverne brugte en række forskellige programmer afhængigt af opgavernes art.

Der var, ligesom de tidligere år, delte meninger blandt lærerne om, hvor enkelt brugen af computer kunne indpasses i de øvrige aktiviteter. De lokale, fysiske rammer var helt afgørende. De tidligere års programmer var suppleret med MathCad, Datameter og TI-interactive. En lærer havde arbejdet med Javapasser i en klasse, og programmet GeoGebra blev anvendt på en af skolerne.



7. En elev sætter sig ind i Datameter

## **6. Erfaringer fra gennemførelsen af projektet**

I dette afsnit er de hovedsynspunkter sammenfattet, som kom til udtryk under de to gruppeinterviews og under samtaler med lærere og elever i forbindelse med observationsbesøgene. Disse hovedsynspunkter og refleksioner er i en del tilfælde illustreret med klip fra interviewene. Det er i så fald angivet hvilket interview der er tale om, samt linjenummer i udskriften af interviewet. Hvor disse refleksioner og synspunkter er underbygget med observationer af situationer i undervisningen, er dette angivet.

### **6.1 Deltagernes umiddelbare opfattelse af projektet**

Lærerne gav udtryk for, at de havde været glade for at deltage i projektet. De har følt sig udfordret i projektet, og godt støttet blandt andet af den indbyrdes kommunikation. De følgende to udtalelser dækker den almindelige mening godt blandt lærerne:

Lærer: (...) det jeg især synes har været godt er at blive kastet ud i at bruge CAS, få lejligheden til at bruge det for alvor. Få mulighed for at snakke med de andre om det, få mulighed for at blive inspireret af hvad de andre har lavet. Det tror jeg har gjort det meget bedre, at få taget ordentligt hul på det, uden det bliver 'halv-sjasket' fra start af. Noget der kunne være anderledes, det jeg selv har fået mindst ud af har været datameter instruktionen, hvor jeg ikke kendte programmet, men bare fik det demonstreret uden at have mulighed for selv at følge med. (Lærerinterview linje 21-27)

L: (...).Jeg har været med i projektet i 4 år og har været meget begejstret. Jeg har først været med hvor eleverne har haft bærbare, og det har været en stor udfordring og spændende og lærerigt. Men det bedste for mig har været de gange hvor vi har mødtes, det har været fantastisk inspirerende at snakke med andre lærere om hvad man laver. Helt banalt synes jeg det har været rigtig rigtig godt. (Lærerinterview linje66-70)

Under uformelle samtaler gav mange af eleverne også udtryk for, at de var glade for at deltage i projektet, men som nogen påpegede havde de jo ikke rigtig noget at sammenligne med.

## 6.2 Indholdet i projektet

### *Brug af CAS*

I gruppeinterviewet diskuterede eleverne betydningen af at kunne regne i hovedet og udføre forskellige matematiske operationer uden brug af hjælpemidler. Følgende er karakteristisk for almindelige elev-overvejelser:

E: Nej altså, nu er vi nået et skridt videre hvor hovedregning ikke er ligeså vigtigt som da vores forældre var børn. Dengang skulle du kunne det, ellers havde du ikke en chance, for du havde ikke de værktøjer til at hjælpe dig. Det har vi nu, og jeg er sikker på at det også er fremtiden, så derfor er hovedregning ikke ligeså vigtigt som det var engang.

E: Jeg ville være mere nervøs hvis jeg ikke kunne finde ud af at bruge sådan et værktøj..

E: Ja helt sikkert.

E: Jeg har en lille bekymring. Den generelle borger kommer overhovedet ikke til at skulle bruge det her hoved-papir regning som folk engang var gode til, men det giver alligevel en helt anden forståelse når du kan det (hoved-papir regning). Det giver en logisk tænkning, jeg tror for sådan nogle som forskere vil det stadigvæk være en meget nødvendig del at kunne det. For at forske videre inden for matematik. Det er sådan jeg fornemmer det.

E: Det gør jo også at, når du kan din hovedregning er du ikke afhængig af at have din lommeregner ved siden af dig hele tiden...

E: Ja det er godt...

E: Det giver en større frihed, at du ikke er 100 % afhængig af din lommeregner(..) (Elevinterview linje 67-81)

Dette spørgsmål blev slet ikke taget op af lærerne, som gennemgående fremhævede at eleverne, undervejs i forløbet, var blevet gode til at vælge passende værktøj. Udtalelser som den følgende var typisk:

L: (..) Jeg synes bl.a. at mine 3.g'ere er rigtig gode til at anvende CAS-værktøjer og til at vurdere hvornår de skal regne i hånden og hvornår de skal bruge CAS-værktøjerne. Hvilke typer af ligninger eller differentiallyigninger, så det synes jeg de bruger det rimelig fornuftigt til, de fleste af dem. (Lærerinterview linje 81-84)

Dog blev der også givet modeksempler, som den følgende bemærkning fra en af lærerne:

L: (..) Altså, hvis de skal udregne en funktionsværdi, altså så gør de det glat væk ved at skrive SOLVE  $y=f(14,.)$ ,  $y$  ikke, altså (latter). Og der må man en gang imellem sige, at selvfølgelig er det korrekt, ikke, men det er jo altså for åndssvagt! Og jeg synes der er mange eksempler på at de bruger programmerne

uhensigtsmæssigt men på den anden side afspejler det jo også at de har mod på at kaste sig ud i det (Lærerinterview linje 429-433)

### *Datameter*

Ikke alle lærerne havde haft lejlighed til at bruge Datameter i deres klasser.

Blandt de der havde ,var det den almindelige vurdering at programmet umiddelbart virkede lettilgængeligt, men hvis det skulle bruges til egentlig statistiske beregninger, tests mv, kunne det være krævende for eleverne at sætte sig ind i. En lærer udtrykte dette på følgende måde:

L: (...) jeg vil sige at det er som om datameter har en dobbelt tærskel, ikke?. Hvis man vil lave simple ting er det nemt at gå til, og det med at trække variable ind på grafen lærer de hurtigt. Hvis man vil lave mere avancerede ting som kræver egentlig statistisk tænkning osv. er det en noget højere tærskel, det er jeg enig i (..) (Lærerinterview linje 103-107)

Programmet havde ikke umiddelbart fænget hos alle elever, for eksempel sagde en lærer:

L: (..) i år har vi lavet en del med datameter, og jeg har den samme erfaring som (Kollega), at mine 3.g'ere har lavet det de skulle, men de var heller ikke interesserede, altså de har heller ikke fået Datameter med hjem. Når de ikke har skullet bruge det til eksamen, hvad så. Jeg tror det var derfor de ikke var så interesserede i det. (Lærerinterview linje 70-74)

Nogle af eleverne gav i gruppeinterviewet udtryk for, at de ikke opfattede Datameter som et værktøjsprogram, som det fremgår af følgende klip fra elevinterviewet:

E: (..) Men der kan jeg føle at med det Datameter der bliver det simpelthen for... det er et forsøg på at lave den brugervenlig, hvor vores lommeregner.. jeg ved ikke hvordan jeg skal forklare det.. men når man som os skriver noget tekst: "Nu har jeg lyst til at gemme de her to vektorer, eller det her træk og slip-system".. Det er som om det er udviklet for en gang 8. klasser, jeg kan ikke se hvad jeg skal bruge det program til, andet end at sidde og finde lotto-sandsynligheder.

I: Man skelner nogle gange mellem pædagogiske programmer eller værktøjer, hvor meningen er at man skal bruge dem til at lære noget.. og så sådan nogle mere redskabsprogrammer.

E: Så må det klart være et pædagogisk værktøj.

E: Datameter er et pædagogisk værktøj

E: Men det kan godt være det bliver for pædagogisk..(Elevinterview linje 142-152)

Under observationsbesøg 2 blev en gruppe på fire elever interviewet ganske kort om deres erfaringer med Datameter efter første lektion med programmet. De foretrak tilsyneladende en mere sagligt /teknisk layout:

E: Det er nærmest lidt for ultra pædagogisk synes jeg, der er LEGO-klodser og sådan noget, altså, man.. altså det minder om sådan et computerspil jeg havde fra LEGO-Land, det var også sådan noget .. det var med at man skulle sætte sådan nogen klodser op og så – ups!! Og så skulle man få sådan en LEGO robot til at gøre et eller andet

I: Synes du at det virker sådan lidt barnligt, måske?

E: Nej, men det er sådan lidt, øhm, altså det er måske egentlig en meget god måde at gøre det på, men øh altså det er jo fordi .. det er lidt åndssvagt det der med at man skal trække en tabel ned og sådan noget, at man ikke bare kan sige 'opret ny tabel' og sige hvad for nogle data den skal knytte sig til

E: Det er jo meget nemt at begynde med men hvis man skal bruge det som værktøj og arbejde med det hver dag, så er det jo ikke praktisk. Der bliver man jo vant til sådan nogen programmer der er lidt mere tekniske og ikke altså særlig brugervenlige, kan man sige, men når man først kender dem, så er de nemme at bruge og hurtige (Lille elevinterview linje 12-20, 37-40 )

Disse fire elever var positivt stemt overfor at blive introduceret til et nyt program, selvom det ikke var sikkert de ville få brug for det:

I: Hvad synes I om det der med at blive introduceret til forskellige programmer? Hvis man nu har det sådan, at man egentlig godt kan lide at have ét program som man er glad for og tryk ved. Hvad synes I så om at blive introduceret for flere forskellige?

E: Jeg synes det er fint. Se de muligheder der er, de alternativer

E: Jeg synes også det er fint

E: Jeg synes måske nok det er meget smart, men det er ikke særlig sandsynligt at vi kommer til at bruge det i den retning vi skal videre, men det er måske meget smart at kende til. Det er måske også meget smart hvis det nu kan et eller andet som Derive ikke kan regne - så er det meget rart at have det andet.

E: Jamen, sådan har jeg det også, jeg synes bare jeg har svært ved at komme i gang – jeg skal lave rigtig rigtig mange øvelser før jeg ligesom kan huske hvordan man gør det. Men det er meget sjovt, sådan at prøve med noget nyt (Lille elevinterview linje 55-66)

En hel del af lærerne benyttede undervisningsmaterialet fra skolekomference ved introduktionen af Datameter for eleverne. Materialet, som fungerede godt for eleverne, udmærkede sig ved at være opbygget af guidende eksempler, afvekslende med problemer der lagde op til mere frit og selvstændigt elevarbejde.

### *Eksperimenterende elever*

På flere af de observerede hold (observation 5 og 7, hhv 4) var der elever som begyndte at eksperimentere på egen hånd for at afprøve programmet (Datameter henholdsvis TI-interactive) og for at undersøge sandsynligheder (Datameter).

Nogle af eleverne berettede om, hvordan de selv prøvede sig frem og modificerede opgaverne:

E: Ja, det er jo også den bedste måde at lære på, når man går ind og leger med de forskellige ting, og det er jo også sådan man lærer med lommeregneren.. Ok ofte får vi nogle tips oppe fra tavlen af fra vores lærer til hvordan man løser de forskellige ting på lommeregneren. Det var f.eks. sådan at jeg lærte det med sandsynlighedsregning, ved selv at lege.

E: også f.eks. den opgave med kast med to terninger, der fik jeg lyst til at vide hvordan de to terninger så ud enkeltvis. I stedet for bare at kigge på sum og difference, gik jeg ind og kiggede på dem som hver sin variable, og så fulgte jeg dem og tænkte 'hvad sker der så med dem'. På den måde modificerer man selv opgaverne lidt og kigger på nogle andre oplysninger, selvom det ikke er nødvendigt men fordi det er noget nyt.



E: Det er generelt for læring på mange steder, ikke kun i skolen..

E: Jeg har også siddet og leget med min lommeregner og selv lavet nogle kommandoer som kan bruges til forskellige ting. F.eks. for at finde toppunktet i en parabel skal jeg bare skrive de tre konstanter ind, og så får jeg toppunktet.. Også andre programmer, for at gøre mit arbejde nemmere.

E: man kan jo også programmere. Jeg ved at der er nogle der har lavet et program til at løse 2.gradsligninger.

E: Det er også meget for nysgerrighedens skyld, for tit ville det være ligeså hurtigt at få lommeregneren til at gøre det, men for at lære at lave programmer. (Elevinterview linje 425-441)

### *Stationære, håndholdte eller bærbare?*

Der var enighed i lærergruppen om, at man ikke vil kunne nå til enighed om den ene løsning frem for de andre. De håndholdte har fordelen ved at være lige ved hånden i alle timerne, og hvis det er en tilstrækkeligt kraftig maskine (som Voyage200) kan den dække behovene bortset fra, at man ikke kan udskrive fra den uden at have en computer. Det giver problemer med graferne og med dokumentationen for, hvordan eleven er kommet frem til sine resultater. Disse problemer blev også omtalt i elev gruppeinterviewet. Et par af eleverne ville gerne have haft mulighed for at arbejde på en bærbar computer:

E: Jeg kunne godt tænke mig at vi havde fået tilskud til bærbare.. Eller i hvert fald fået større mulighed for at tage den med for det kunne være fedt også bare med notat-skrivning at kunne gøre det på computeren. Fordi det at søge notater og notere det er bare så meget nemmere. Jeg kunne godt tænke mig at have mine notater fra gymnasiet på computeren.

E: Ja det ville være noget nemmere, i hvert fald til eksamen (Elevinterview linje 269-273)

De stationære computere dækker også disse behov og kan rumme mange flere forskellige programmer. Men de lokale forhold såsom kapacitet, tilgængelighed og fleksibilitet med hensyn til reservation er helt afgørende for hvor bekvemt brugen af stationære computere kan integreres i den øvrige undervisning.

Bærbare computere har ikke nogen af disse ulemper, og på nogle hold var eleverne frit stillet til at medbringe deres egen laptop.

Der blev ikke nævnt nogen sammenhæng mellem arbejdsform og håndholdt contra stationær computer.



8. Grupperarbejde i computerrummet



9. Individuelt arbejde i computerrummet

### 6.3 Hvordan har undervisningen med CAS udviklet sig i løbet af projektet?

For de lærere som havde deltaget i projektet et par år eller mere, var der ingen tvivl om, at den vigtigste udvikling der var sket gennem tiden var deres egen øgede viden om og færdighed i at håndtere det forskellige software. Lærerne understregede, hvor vigtigt det er som lærer at være helt hjemme i de programmer man bruger i undervisningen

L: Ja, ligesom (Kollega) så vil jeg også sige det sværeste i starten, det var selv at lære det der Derive at kende, fordi det er utrolig vigtigt at man kan det – man kan meget bedre give det fra sig når man er blevet noget bedre til det. Det synes jeg i hvert fald er erfaringen. (Lærerinterview linje 385-387)

En del gav udtryk for at workshoppene med Datameter havde været meget udbytterige. En lærer fortalte om sine erfaringer med at introducere værktøjet for eleverne:

L: Jeg synes, en ting som jeg har lært er, at jeg skal være – jeg har lært undervejs at jeg skal være ret omhyggelig med nogle igangsættende opgaver som skal være nemme og på den anden side opfordrede til at eksperimentere med værktøjet. Fordi, det er ikke nok at præsentere det – eleverne går ikke i gang med at udforske det eller bruge det af sig selv bare fordi de har fået vist tingene. De skal virkelig trækkes til truget og gerne gennem nogle meget simple opgaver først. Og så måske have nogle opgaver for, som de skal aflevere ved hjælp af det her værktøj som de nu skal introduceres for og derefter frit slag. Så fungerer det, så opdager de hvad det kan bruges til. Så småt. Men man skal gøre en aktiv indsats der for at hjælpe processen i gang. (Lærerinterview linje 376-384)

### 6.4 Hvad skal der ske som det næste?

Under gruppeinterviewet med lærerne blev de spurgt hvad de anså for at blive næste skoleårs års udfordringer. Der var bred enighed om, at de nye fag-samarbejder ville blive det mest krævende. Både i almen studieforberedelse, og i matematik som studieretningsfag, specielt studieretningsprojekterne. Lærerne efterlyste eksempler og idéer til hvordan man kunne få kernestof med i de tværfaglige projekter. Desuden nævnte flere, at de skulle sætte sig noget mere ind i statistik. En lærer svarede:

L: Så langt er jeg ikke kommet endnu i min planlægning! Altså, hvis man ikke har haft en 1.g så har man skudt det langt ud, alt det der. Men jeg kan se, at man snakker om eksperimenterende matematik, ikke? Det er noget af det – det er kodeordet i øjeblikket. Uden at.. ja det bliver der lavet kurser i. Men det er noget af de nye, der skal til at laves. Og så box-plot. De snakker meget om box-plot (latter). Og det er jo i hvert fald simpelt hvis man har datameter. Så er det ikke noget problem. Men de andre snakker om Excel og sådan.. (latter)

L: Jeg har arbejdet professionelt med statistiske problemstillinger i mange år, og jeg har aldrig nogen sinde kigget på et box-plot (latter, pjat)  
(Lærerinterview linje 468-476)

Der var enighed i gruppen om, at brugen af CAS ikke længere ville være den store udfordring.

## **7. Undervisningsmateriale**

Ved projektets afslutning fandtes en samling velgennemarbejdet og afprøvet samling undervisningsmateriale af varierende omfang på projektets hjemmeside. Det følgende er forfatterens egne præsentationer på hjemmesiden af deres undervisningsmateriale:

- **Funktioner af to variable** af *Christian Thune Jacobsen*

Et undervisningsforløb, hvor CAS værktøjet kommer til sin fulde ret. Læreren er primært i baggrunden som konsulent. Der er vedlagt løsningsforslag i et selvstændigt dokument (i Derive & Maple) til læreren for en betydelig del af øvelserne. Det er et vel afprøvet CAS-forløb, der kan gennemføres allerede i 2.g efter at eleverne har haft differentialregning. Kendskab til vektorregning vil dog være en fordel. Der indgår endvidere et eksperimentelt forløb om Taylorpolynomier, der kan behandles uafhængigt af den øvrige tekst. Der er i hele undervisningsforløbet lagt vægt på at eleverne skal visualisere matematikken for derved at opbygge deres matematiske intuition. Ingen yderligere litteratur er nødvendig. Omfanget af undervisningsforløbet kan nemt justeres, idet forløbet kan afrundes efter hvert kapitel.

- **Noter til Derive5** af *Bjørn Felsager*

Noter udviklet til et kursus i Matematiklærerforeningen om DERIVE i matematikundervisningen. Noterne er også brugt på kurser i Projekt "Matematik og naturfag i Verdensklasse". Noterne er en manual til brug af programmet DERIVE i gymnasiets forskellige matematikemner. Desuden er der eksempler på, hvordan DERIVE kan udnyttes til eksempler, der ikke kunne inddrages i undervisningen uden et sådant CAS-værktøj.

*Graftegning i Derive side 1 – 12*

*Ligninger og uligheder i Derive side 13 – 31*

*Modeller i Derive side 32 – 46*

*Differentiation med Derive side 47 – 61*

*Integration med Derive side 62 – 76*

*Differentialligninger med Derive side 77 – 110*

*Rumgeometri med Derive side 111 – 140*



10. Elever i par arbejde i computerrummet

- Differentialligninger af Niels Hjersing, Per Hammershøj Jensen og Børge Jørgensen

Tidligere, hvor vi ikke havde adgang til computere og computergrafik, blev emnet differentialligninger for det meste dækket af en række tricks til at løse nogle standardtyper af differentialligninger. Uheldigvis kan de fleste differentialligninger (især hvor de anvendes på "virkelige" fænomener) ikke løses analytisk ved disse eller andre metoder. I dag har vi mange steder adgang til computere, computergrafik og CAS-programmer, som dog heller ikke kan løse de fleste af de differentialligninger, der opstår. Men de kan give nogle grafiske repræsentationer og numeriske løsninger, og i mange tilfælde er det godt nok. Vi har valgt at flytte fokus i undervisningen, så det ikke bare går ud på at finde en løsning til differentialligningen, men mere at forstå den dynamik, som ligningen udviser. Vi arbejder i dette materiale med analytiske løsninger og numeriske og kvalitative metoder. Vi lægger mere vægt på geometriske fremstillinger som hældningsfelter med (mange) linjeelementer og introducerer begrebet ligevægtpunkter. Mange steder spørges man ikke om at finde den specifikke løsning til en differentialligning. Snarere vil man blive udfordret til at forstå de billeder, computeren kan fremstille, og forstå forskelligheden i de løsninger, en differentialligning kan have, og relatere billederne tilbage til selve modellens anvendelse på "virkeligheden".



11. Elever i gruppearbejde ved computeren

- Lineær programmering med Derive af Børge Jørgensen

Lineær programmering med *Derive* er - som titlen antyder - et undervisningsforløb, som i høj grad udnytter mulighederne i et CAS-program. I fremstillingen introduceres begrebet lineær programmering (LP) samt den mest anvendte metode til løsning af LP-problemer: Simplexmetoden. Desuden behandles begreberne skyggepriser og følsomhedsanalyse, herunder hvordan slutsimplextablellens værdier kan anvendes i beskrivelsen af disse begreber. *Derive's* faciliteter til grafisk fremstilling, til matrixmanipulation samt til bestemmelse af simplextablellerne

mindsker i væsentlig grad de beregningsmæssige sider i løsningen af LP-problemer, hvorved der i højere grad kan fokuseres på det indholdsmæssige i begreberne.

- Komplekse tal af *Hanne Østergaard*

Dette undervisningsmateriale er beregnet til et valgfrit emne i matematikundervisningen i gymnasiet. Der forudsættes kendskab til løsning af andengradsligninger og til trigonometri. Noterne handler om definition af og regning med de komplekse tal, om den komplekse talplan og om komplekse andengradsligninger. Materialet er beregnet på, at eleverne sidder og arbejder ved computeren. Der er indlagt opgaver og quizzet. Ved at klikke på opgaverne åbnes et DERIVE-vindue til at arbejde i.

Desuden var notematerialet, udarbejdet i forbindelse med projektet i perioden 2000-2003, også gjort tilgængeligt på hjemmesiden.

## **8. Konklusioner og perspektiver**

I det følgende vurderes delprojektet *Matematik med CAS* i relation til følgende mål fra projektbeskrivelserne: 1) Lærernes kompetenceudvikling, 2) Dannelse af netværk mellem skoler som ramme blandt andet for samarbejde med fagdidaktiske forskere, samt undersøgelse af CAS-værktøjs potentiale for 3) Nye undervisningsmål, herunder elevaktiverende arbejdsformer og for 4) Kvalitative løft i undervisningen.

### **8.1 Lærernes kompetenceudvikling**

Der synes ikke at herske tvivl om, at de deltagende lærere har videreudviklet deres faglige og fagdidaktiske kompetencer på en række områder. Følgende faktorer har været afgørende for denne udvikling<sup>4</sup>:

- Det at projektet og dets forløber har strukket sig over lang tid
- Det relativt store antal deltagende skoler og lærere
- Der har været økonomiske ressourcer i projektet som stod i et rimeligt forhold til forventningerne til deltagerne
- At lærerne i høj grad har taget ejerskab til projektet
- Den gode kommunikation mellem lærerne, både via skolekom konferencen, netværksmøderne og ved uformelle kollegiale henvendelser
- En passende blanding af selvstændigt arbejde på skolerne og fælles, relevant input fra eksterne workshop instruktører og oplægsholdere
- Lærernes faglige og professionelle kvalifikationer ved projektets start

---

<sup>4</sup> Faktorer, som har betydning for at læreres professionelle udvikling kan forløbe vellykket, diskuteres specielt i relation til projektet *Matematik og Naturfag i Verdensklasse* i (Andresen og Thorslund 2005) og i (Andresen 2006)

Områder, hvor lærernes kompetenceudvikling især var tydelig, var:

#### *Introduktion af Datameter som værktøj for eleverne*

Datameter blev grundigt og inspirerende præsenteret som et værktøj, specielt velegnet for eleverne til at arbejde selvstændigt med statistiske spørgsmål og problemer. Dermed kunne introduktionen af brugen af programmet for lærerne opfylde to mål: dels fik lærerne et ekstra redskab at tage i anvendelse, når de fremover finder det hensigtsmæssigt at ville fremme elevernes eksperimenteren indenfor udvalgte, statistiske emner. Og dels virkede både de tre workshops og udarbejdelsen og afprøvningen af lærernes egen og kollegernes materiale som en, for mange kærkommen, lejlighed til at genopfriske og videreudvikle kendskabet til statistisk databehandling herunder tests. Indkøbet af statistikbogen understøttede dette. Flere af lærerne nævnte da også som en af det kommende års udfordringer, at de ville sætte sig bedre ind i nogle emneområder indenfor statistik.

#### *Elevernes og lærernes indstilling til at bruge CAS*

Det er karakteristisk, at brugen af CAS ikke længere diskuteres som et spørgsmål man kan være for eller imod, men derimod som et spørgsmål om at vælge hensigtsmæssigt i situationen. Der blev, både ifølge lærernes og elevernes udtalelser og uformelle samtaler under observationerne, generelt skabt et ret stort, individuelt spillerum for eleverne indenfor de fælles rammer, med hensyn til valg af redskab. For eksempel kunne elever på samme hold i mange tilfælde selv, i den aktuelle situation, vælge om og hvornår de ville bruge lommeregner, PC hhv. håndholdt eller regne i hånden for at løse et konkret problem. En sådan frihed kan sjældent mestres af en lærer som selv er nybegynder med hensyn til værktøjet. Dette bekræftes også af de lærer-erfaringer refereret ovenfor (side 18), om vigtigheden af selv at være fortrolig med programmer mv.

#### *Udvikling af undervisningsmateriale*

Den righoldige samling af undervisningsmateriale, som lærerne har udarbejdet undervejs i projektet, udvekslet og arbejdet videre på, taler jo sit tydelige sprog om et andet område hvor der er sket en udvikling hos deltagerne. Især er det interessant, at dele af produktionen af materiale har været mere kollektiv end sædvanligt for gymnasielærere, antageligt fordi den er foregået indenfor rammerne af projektet. Yderligere er materialet i en lang række tilfælde karakteriseret ved, at det sigter på at guide eleverne gennem relativt selvstændige forløb præget af ret åbne spørgsmål. Dermed skabes der mulighed for en aktiv og undersøgende elevvirksomhed, i overensstemmelse med anden del af punkt 3) ovenfor.

#### 8.2 Dannelse af netværk mellem skoler

Netværksmøderne og skolekom konferencen har fremmet gruppefølelsen hos deltagerne. Møderne blev hver gang afviklet i en

frugtbar, god og venskabelig atmosfære, i høj grad takket være Anne Winther Petersen, som ledede dem med fin sans for balancen mellem faglighed og hygge.

Lærerne gjorde under interviewet igen opmærksom på, hvor stor betydning det har, at 'der lige er nogen der har prøvet det før, som man kan spørge til råds'. Dette var man enige om også gjaldt fremover for de kolleger på andre skoler, der ikke har deltaget i projektet, men som nu lige er gået i gang med at bruge CAS eller skal til det.

Med hensyn til netværkets funktion som ramme for samarbejde med fagdidaktikforskere må den vellykkede gennemførelse af Ph.d. projektet '*Taking advantage of computer use for increased flexibility of mathematical conceptions*' (Andresen 2006) tages som udtryk for succes<sup>5</sup>. Den meget righoldige samling af materiale både fra første og andet gymnasie matematik delprojekt, i form af undervisningsmateriale, observationer og videoptagelser af undervisning samt interviews og uformelle samtaler, vil komme til at danne basis for yderligere, skriftlig og elektronisk formidling af resultater og erfaringer i det kommende år.

Flere af netværksmøderne havde, som det fremgår af oversigten i afsnit 3.2, desuden oplæg ved fagdidaktiske forskere med efterfølgende, gensidigt udbytterige diskussioner på programmet.

### 8.3 Nye undervisningsmål, herunder elevaktiverende arbejdsformer

De elevaktiverende arbejdsformer er allerede nævnt i afsnit 8.2.

Listen i afsnit 3.3 over emner som lærerne havde benyttet CAS til, afspejler at de enkelte lærere selvstændigt har opstillet en lang række nye undervisningsmål, foranlediget af de redskaber der var til rådighed. Specielt er forskellige områder indenfor statistik kommet i fokus, i overensstemmelse med de nye krav til undervisningen efter reformen. For de fleste af disse emners vedkommende har tilstedeværelsen af nye redskaber til rådighed åbnet mulighed for et større fagligt udbytte for eleverne forstået som inddragelse af større stofområder.

### 8.4 Kvalitative løft i undervisningen

Foruden inddragelsen af større stofområder, nævnt i forrige afsnit, skulle projektet undersøge om undervisningen kunne få et kvalitativt løft ved at lærerne tog udgangspunkt i materiale som var skræddersyet til et CAS-værktøj og greb undervisningen an på en ny måde.

Der var ikke i projektet indbygget en egentlig sammenligning, for eksempel mellem grupper af elever der blev udsat for forskellige typer undervisning. Ligesom der ikke var opstillet kriterier for måling og evaluering af undervisningens kvalitet, for eksempel foreligger der ikke måledata i form af eksamensresultater eller før- og efter tests med kontrolgruppe etc. Et håndfast evidensbegreb baseret på sådanne kvantitative undersøgelser ville ikke have harmoneret med projektets

---

<sup>5</sup> Ph.d. projektet handler om indsatsområde A i første runde af Verdensklasse projektet. Der findes et resumé på dansk af afhandlingen på [www.dpu.dk](http://www.dpu.dk) under Mette Andresen, publikationer.

profil og de underliggende antagelser om undervisning og læring der dominerer den skolekultur, som projektet udfoldede sig i (Andresen 2006). For eksempel ville den enkelte lærers professionelle kompetenceudvikling under projektet antagelig hæmmes eller måske bremses, hvis effekten af lærerens forsøg med nyt, hjemmefremstillet undervisningsmateriale eller med nye måder at gribe undervisningen an på, straks skulle 'måles og vejes' med før- og efter tests. Derved ville et af de væsentligste resultater af projektet gå tabt. Dette udelukker ikke, at næste skridt nu kunne være gennemførelsen af en kvantitativ undersøgelse, hvor undervisningsmateriale og -former blev afprøvet og evalueret under kontrollerede former.

Ikke desto mindre er det min vurdering, at undervisningen ubetinget fik et kvalitativt løft under projektet. Dette kvalitative løft dækker over elevernes mulighed for bedre matematisk begrebsdannelse i kraft af, at brugen af det nye værktøj kan facilitere skift mellem forskellige repræsentationer af, og forskellige perspektiver på de matematiske begreber. De perspektiver det drejer sig om er på flere niveauer og vedrører både modelleringsaspekter, generalisation- eksemplificering og en række andre. Det kvalitative løft vedrører også de allerede nævnte guidende undervisningsmaterialer, der lagde op til udforskende elevaktiviteter. Disse undervisningsmaterialer var skræddersyede, ikke blot til værktøjet, men i de fleste tilfælde også til den aktuelle elevgruppe, i kraft af at deres lærer selv havde udarbejdet det.

## **9. Referencer**

- Andresen, M. (2006). *Taking advantage of computer use for increased flexibility of mathematical conceptions*. Danmarks Pædagogiske Universitet. Ph.d. afhandling.

- Andresen, M. og Thorslund, J. (red). (2005). *Lærere i bevægelse*. Roskilde Universitetsforlag

- Andresen, M., Pawlik, E. og Winther, A. (2004). *PC'en i brug. Erfaringer fra Gymnasiets højniveau i matematik, fysik og kemi*. Learning Lab Denmark.