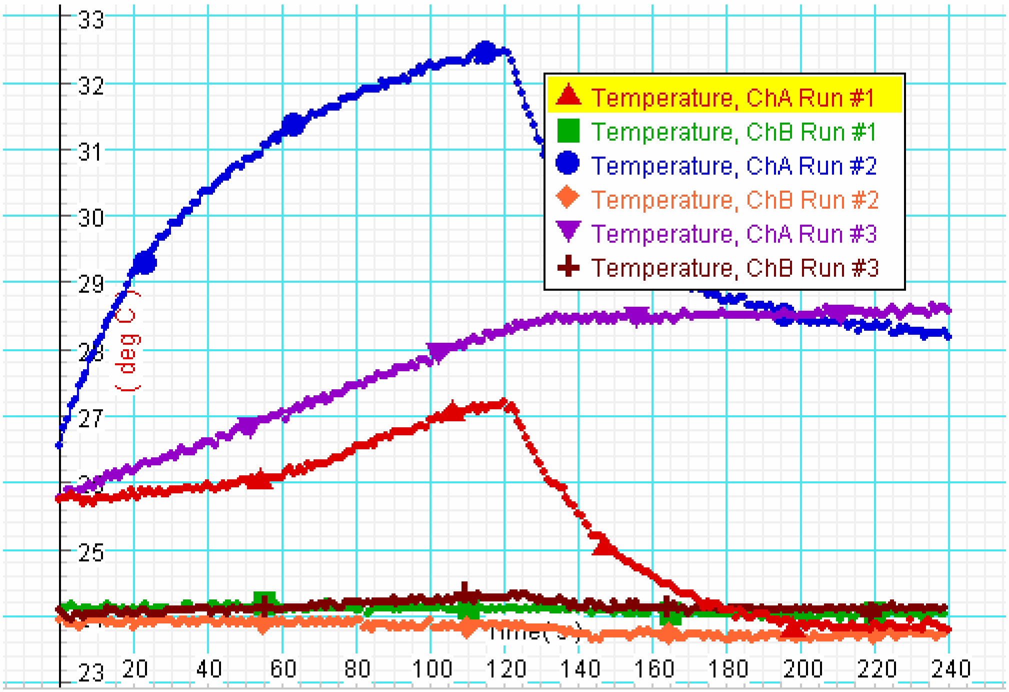
Differentialligninger

Et undervisningsforløb med *Derive* og modelbygning

Højt niveau i matematik i gymnasiet



Niels Hjersing • Per Hammershøj Jensen • Børge Jørgensen

Indholdsfortegnelse[1]

Undervisningsmaterialet er udarbejdet med økonomisk støtte fra forsøget ”Matematik og naturvidenskab i verdensklasse”, som Københavns og Frederiksberg kommuner og Frederiksborg, Københavns og Roskilde amter står bag **(http://www.matnatverdensklasse.dk/).**
Tak til **Anne Winther Petersen** og **Mette Andresen** for opmuntring og hjælp.

[1] Version 1.03 (01.03.2004)

Forord

Dette undervisningsmateriale dækker emnet differentialligninger på højt niveau i gymnasiets matematikundervisning. Det er tænkt som en ny indgang til emnet nu hvor standardforsøgsbekendtgørelsen med projekter og fremkomsten af CAS-programmer har gjort det muligt at gå nye veje. Materialet er udarbejdet til programmet *Derive*, men kan (tror vi) bruges med andre programmer uden større ændringer. Materialet egner sig ikke som introduktionsmateriale til *Derive*, så programmet forudsættes bekendt for lærer og elever.

Tidligere, hvor vi ikke havde adgang til computere og computergrafik blev emnet differentialligninger for det meste dækket af en række tricks til at løse nogle standardtyper af differentialligninger. Uheldigvis kan de fleste differentialligninger (især hvor de anvendes på ”virkelige” fænomener) ikke løses analytisk ved disse eller andre metoder.
I dag har vi mange steder adgang til computere, computergrafik og CAS-programmer, som dog heller ikke kan løse de fleste af de differentialligninger, der opstår. Men de kan give nogle grafiske repræsentationer og numeriske løsninger, og i mange tilfælde er det godt nok.

Vi har valgt at flytte fokus i undervisningen, så det ikke bare går ud på at finde en løsning til differentialligningen, men mere at forstå den dynamik, som ligningen udviser. Vi arbejder i dette materiale med analytiske løsninger og numeriske og kvalitative metoder. Vi vil lægge mere vægt på geometriske fremstillinger som hældningsfelter med (mange) linjeelementer og introducerer begrebet ligevægtspunkter.
Mange steder spørges eleverne ikke om at finde den specifikke løsning til en differentialligning. Snarere vil de blive udfordret til at forstå de billeder computeren kan fremstille og forstå forskelligheden i de løsninger en differentialligning kan have og relatere billederne tilbage til selve modellens anvendelse på ”virkeligheden”.

De differentialligninger, vi introducerer, vil i stor udstrækning handle om virkelige problemer. Vi arbejder med opstilling af modeller og med hvad de forskellige tilføjede led på højresiden kan opfattes som i den virkelighed, som modellen søger at beskrive. Vi håber, ved at vise mange eksempler, at kunne opbygge en vis fornemmelse for modeller, en ”modelkending”, som et parallelt begreb til opbygningen af en ”grafkending” over for forskellige typer af grafer.

Vi har indlagt nogle større opgaver, projekter. Produktet er her mere essayprægede rapporter end det er opgaveløsning i traditionel forstand med rutineudregninger. Eleverne skal bruge *Derive* for at komme op med et svar på de spørgsmål, der er stillet.

Eleverne skal også bestå eksamen i løsning af standardopgaver. Vi gennemgår i dette materiale den teori der knytter sig til standardløsningerne, men vi undlader stort set at stille opgaver på disse områder. De må let kunne findes i den vejledende samling af eksamensopgaver.

Det har været inspirerende for os at læse Paul Blanchard, Robert L. Devaney og Glen R. Hall: **Differential equations second edition**, Brooks/Cole. Interesserede kan finde mange muligheder for at uddybe dette undervisningsmateriale i denne bog eller på den tilhørende hjemmeside **http://math.bu.edu/odes.**
Vi kan også anbefale hjemmesiden: **http://www2.spsu.edu/math/Dillon/oderesources/.**

Niels Hjersing • Per Hammershøj Jensen • Børge Jørgensen

Introduktion til differentialligninger

Vi har tidligere set på, hvordan man bestemmer stamfunktioner, hvilket som bekendt vil sige at bestemme funktioner, hvis afledede funktion man kender. Lad eksempelvis den afledede funktion være

#1: $2\cdot x$

At bestemme stamfunktionen til denne funktion kunne formuleres:
Løs ligningen

#2: $f'(x) = 2\cdot x$

med hensyn til f (og ikke som normalt med hensyn til x).
Idet vi sætter

#3: $y = f(x)$

kan ligningen også skrives[2]

#4: $y' = 2\cdot x$

eller

#5: $\frac{dy}{dx} = 2\cdot x$

Disse to sidste skrivemåder vil vi benytte i det følgende, og kalder ligningen for en **differentialligning**.

Vi kan naturligvis bestemme stamfunktionerne i dette tilfælde, eller sagt på en anden måde: Vi kan finde **den fuldstændige løsning** til differentialligningen. Nu er differentialligninger imidlertid ikke altid så simple som denne - nogle kan slet ikke løses analytisk - så lad os prøve at se, hvad vi kan sige om løsningerne uden at kende dem.

Den angivne differentialligning har som bekendt uendelig mange løsninger, med mindre vi kræver, at grafen (her kaldet **løsningskurven** eller **integralkurven**) går gennem et givet punkt (x0,y0) - i så fald er der netop én løsning (hvis løsningsfunktionen i øvrigt er defineret her).
Lad os i første omgang forlange, at løsningskurven skal gå gennem punktet (x0,y0) = (1,-2).
Da fortegnet for y' bestemmer løsningsfunktionens monotoniforhold, kan vi umiddelbart se, at funktionen er aftagende for x<0 og voksende for x>0.
Vi vil nu forsøge at tegne en graf, der i nogen grad ligner grafen for løsningsfunktionen. Dette gøres på følgende måde: Først opstiller vi en ligning for tangenten i det givne punkt; hældningskoefficienten er jo y'(x0) = 2x0:

#6: $y - y0 = y'(x0)\cdot(x - x0)$

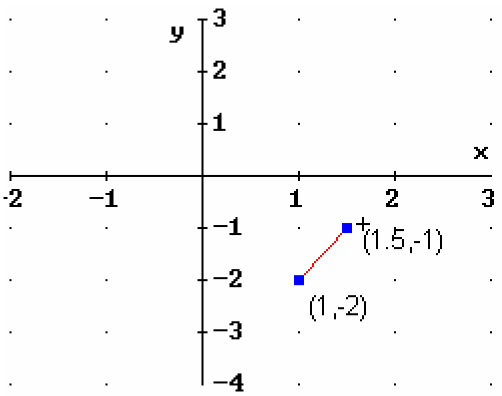
#7: $y - -2 = 2\cdot 1\cdot(x - 1)$

#8: $y = 2\cdot x - 4$

Tangenten vil i nærheden af punktet følge grafen for løsningsfunktionen, så vi tegner et lille stykke af tangenten - vi vælger her at lade x vokse med 0.5, altså fra 1 til 1.5

[2] I #4 og #5 ser du de traditionelle måder at skrive en differentialligning på. Ingen af skrivemåderne er velegnede i *Derive*, så for at skrive dem på denne måde, har vi har brugt det trick at sætte anførselstegn som vist her: ”y’”=2x og ”dy”/”dx”=2x

#9: $IF(1 \le x \le 1.5,\ 2 \cdot x - 4)$



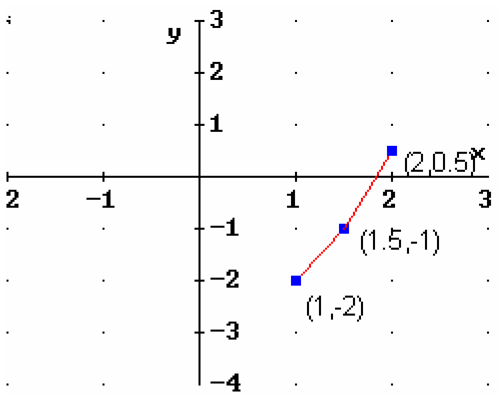
Når x = 1.5 , bliver y = 2*1.5 - 4 = -1, så det afsatte stykke af tangenten bliver linjestykket fra (1,-2) til (1.5,-1).
Vi gentager nu processen ud fra det nye punkt: Først finder vi tangentligningen

#10: $y - -1 = 2 \cdot 1.5 \cdot (x - 1.5)$

#11: $$y = 3 \cdot x - \frac{11}{2}$$

Herefter tegner vi et lille stykke af tangenten, igen med en x-tilvækst på 0.5

#12: $IF\left(1.5 \le x \le 2,\ 3 \cdot x - \frac{11}{2}\right)$



Når x=2 bliver y=0.5, så det nye linjestykke går fra (1.5,-1) til (2,0.5).
Vi tager lige en mere.
Tangentligningen bliver

#13: $y - \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \cdot (x - 2)$

#14: $$y = 4 \cdot x - \frac{15}{2}$$

og linjestykket tegnes

#15: $IF\left(2 \le x \le 2.5,\ 4 \cdot x - \frac{15}{2}\right)$

Endepunktet bliver (2.5,2.5).
Vi kunne også lade x-tilvæksten være negativ, så vi vender lige tilbage til vores udgangspunkt (1,-2). Tangenten kender vi jo fra tidligere, så vi tegner linjestykket

#16: $\mathrm{IF}(0.5 \le x \le 1,\ 2\cdot x - 4)$

med endepunkt (0.5,-3).
Næste tangentligning bliver

#17: $y - -3 = 2\cdot 0.5\cdot (x - 0.5)$

#18: $$y = x - \frac{7}{2}$$

og linjestykket bliver

#19: $\mathrm{IF}\left(0 \le x \le 0.5,\ x - \frac{7}{2}\right)$

med endepunkt (0,-3.5).
Vi tager lige hurtigt to mere:

#20: $y - -3.5 = 2\cdot 0\cdot (x - 0)$

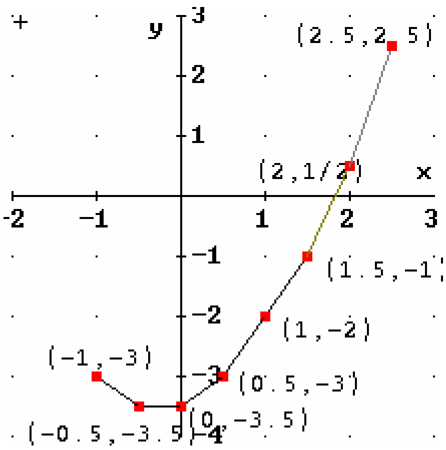
#21: $$y = -\frac{7}{2}$$

#22: $\mathrm{IF}\left(-0.5 \le x \le 0,\ -\frac{7}{2}\right)$

#23: $y - -3.5 = 2\cdot (-0.5)\cdot (x - -0.5)$

#24: $$y = -x - 4$$

#25: $\mathrm{IF}(-1 \le x \le -0.5,\ -x - 4)$



Vi har nu fået en approximation til løsningskurven uden at kende løsningsfunktionen.
Den her benyttede metode til numerisk at finde en løsning til differentialligningen kaldes **Eulers metode**. Den er ganske tidskrævende, men heldigvis har Derive en funktion, der klarer beregning og tegning i et snuptag:

#26: `EULER_ODE(r, x, y, x0, y0, h, n)`

hvor r er den givne afledede funktion, x og y de sædvanlige variable, x0 og y0 er udgangspunktet, h

er x-tilvæksten og n er antal tangentstykker der tegnes.
Lad os prøve at benytte denne funktion på den ovenfor behandlede differentialligning.

```
#27:  EULER_ODE(2·x, x, y, 1, -2, 0.5, 3)
```

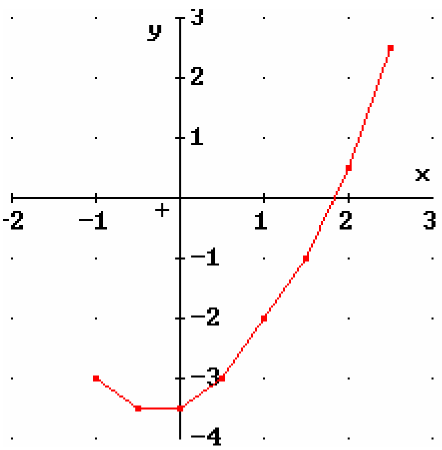
Når vi klikker på "=" fås

#28:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

altså netop de punkter, der bestemmer tangentstykkerne.
Hvis punkterne skal forbindes med linjestykker, skal denne egenskab aktiveres: I plotvinduet **Options**>**Display**>**Points** markeres **Yes** ved **Connect**.
Når vi skal baglæns skal h være negativ - og vi havde i denne retning 4 tangenter:

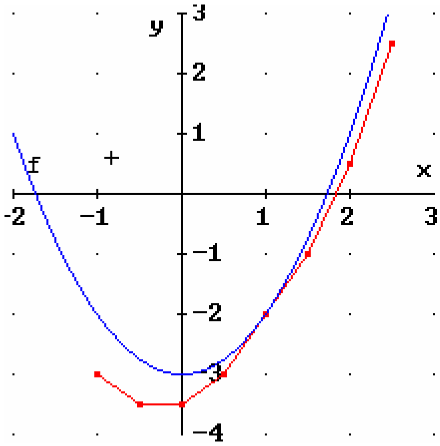
```
#29:  EULER_ODE(2·x, x, y, 1, -2, -0.5, 4)
```

#30:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$



Lad os prøve at sammenligne den fundne løsningskurve med den korrekte, som vi jo i dette tilfælde kan bestemme, idet samtlige stamfunktioner til 2x er x^2+k, så løsningen gennem punktet (1,-2) er

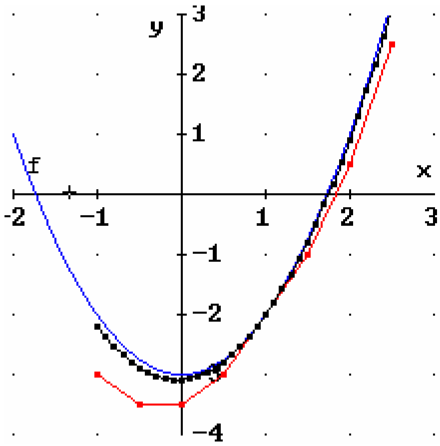
#31: $f(x) := x^2 - 3$



Som det ses, er der nogen afvigelse - specielt hvor kurven krummer meget. Vi kunne måske forbedre den numeriske løsning, hvis vi gør x-tilvæksten mindre - og forøger antallet af skridt for at få den samme del af kurven.
Vi er her ikke specielt interesseret i at få udskrevet tabellen med linjestykkernes endepunkter, så vi skjuler disse beregninger: I plotvinduet **Options>Simplify Before Plotting**. Denne indstilling fastholder vi fra nu af. Vi kan nu fx tegne #32 direkte ved at markere linjen, gå til plotvinduet og tryk på F4.

```
#32:  EULER_ODE(2·x, x, y, 1, -2, 0.1, 15)

#33:  EULER_ODE(2·x, x, y, 1, -2, -0.1, 20)
```



Dette blev betydeligt bedre, men dog stadig med nogen afvigelse.
Vi skal senere se på numeriske metoder, der giver bedre resultater.

Som tidligere nævnt er der til differentialligningen

#34: $$\frac{dy}{dx} = 2\cdot x$$

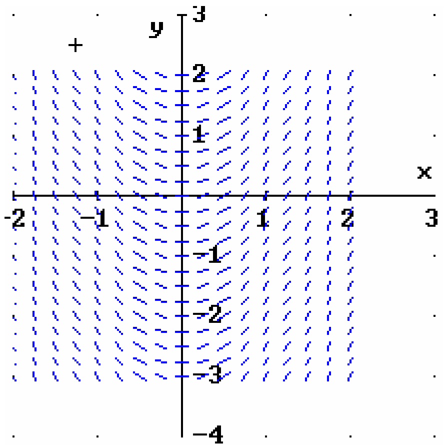
uendelig mange løsninger, når vi ikke kræver, at løsningskurven skal gå gennem et bestemt punkt.
For at få et overblik over forløbet af løsningskurverne kunne vi fortsætte tankegangen fra det forrige og vælge en passende mængde af punkter og gennem disse tegne et lille stykke af tangenten. Disse små stykker kaldes **linjeelementer**, som beskrives ved punktets koordinater (x0,y0) og tangentens hældning α. Man siger, at kurven går gennem linjeelementet (x0,y0;α).
Heldigvis har Derive også en funktion der kan klare dette:

```
#35:   DIRECTION_FIELD(r, x, x0, xm, m, y, y0, yn, n)
```

hvor x går fra x0 til xm i m skridt, og y går fra y0 til yn i n skridt.

For at gøre linjeelementtegningen (hældningsfeltet) overskuelig bør man fjerne markeringen af linjestykkernes endepunkter: I plotvinduet **Options**>**Display**>**Points** markeres **Small** ved Size. Desuden bør alle linjestykker tegnes i samme farve: I plotvinduet **Options**>**Change Plot Colors** gøres inaktiv, og endelig bør du vælge en tydelig farve: I plotvinduet **Options**>**Display**>**Plot Color** vælges **Next Color** fornuftigt.

```
#36:   DIRECTION_FIELD(2·x, x, -2, 2, 16, y, -3, 2, 20)
```



Dette billede giver et indtryk af løsningskurvernes forløb.
Bemærk at for en fast x-værdi er tangenthældningerne ens (y' afhænger kun af x).
Lad os prøve at tegne nogle af løsningskurverne.
Den fuldstændige løsning til differentialligningen

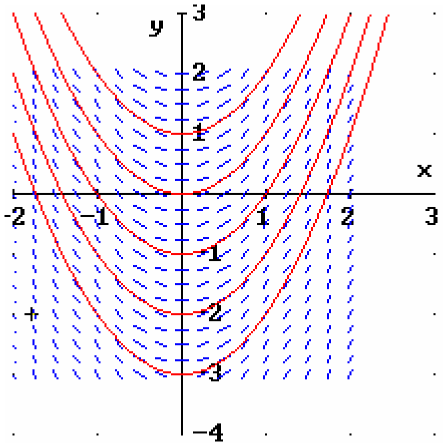
#37: $\dfrac{dy}{dx} = 2\cdot x$

er jo (som tidligere nævnt) givet ved

#38: $y = x^2 + k,\ k \in R$

Vi tegner løsningskurverne for k = -3, -2, -1, 0, 1 (skift farve):

#39: $\text{VECTOR}(x^2 + k, k, -3, 1, 1)$



Den differentialligning, vi netop har betragtet, er et eksempel på en **første-ordens** differentialligning, hvilket betyder, at det kun er den første afledede af y, der optræder. I modsætning til det gennemgåede eksempel kan højresiden i differentialligningen indeholde både x (den uafhængige variable) og y (den afhængige variable) samt forskellige **parametre**, som er konstanter (varierer ikke med x), således at differentialligningen generelt kan skrives på formen:

#40: $$\frac{dy}{dx} = g(x,y)$$

Vi kan f.eks. have

#41: $$g(x,y) = a\cdot x\cdot y + b\cdot \hat{e}^{-x^2} - c$$

hvor a, b og c er parametre.

Lad os prøve at undersøge differentialligningen, hvor

#42: $$g(x,y) = \frac{1}{2}\cdot y$$

altså

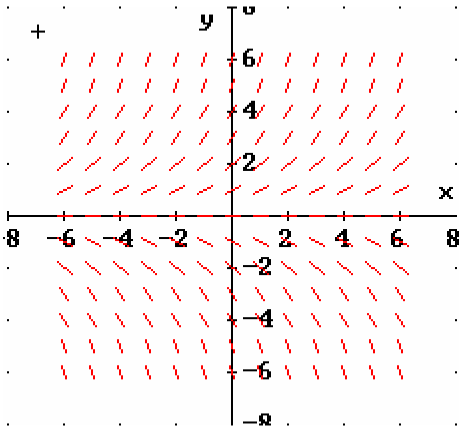
#43: $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot y$$

Vi ser først på monotoniforholdene.
Hvis en løsningsfunktion for en værdi x0 er positiv, er differentialkvotienten positiv, og dermed er funktionen voksende, hvorved differentialkvotienten bliver større, så funktionen vokser hurtigere - tilsvarende for negativ og aftagende. Da funktionerne er differentiable og dermed kontinuerte, følger at en løsningsfunktion har konstant fortegn eller er 0-funktionen.
At 0-funktionen (y = 0) er løsning ses ved at indsætte denne i ligningen:

#44: $$\frac{d0}{dx} = 0 \wedge \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Hældningsfeltet giver yderligere oplysninger om løsningskurverne:

#45: DIRECTION_FIELD$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ -6,\ 6,\ 12,\ y,\ -6,\ 6,\ 12\right)$



Bemærk, at for en fast y-værdi (vandret linje) er tangenthældningerne ens (y' er kun afhængig af y).

Lad os få tegnet nogle af løsningskurverne ved hjælp af Eulers metode.
Gennem punktet (-1,2):

#46: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ -1,\ 2,\ 0.1,\ 60\right)$

#47: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ -1,\ 2,\ -0.1,\ 60\right)$

Gennem punktet (2,0):

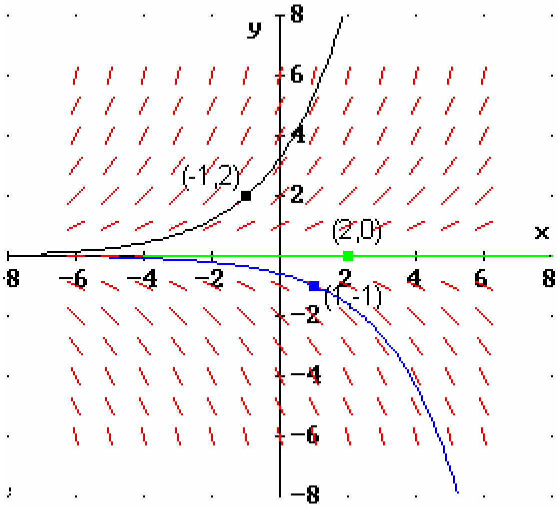
#48: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ 2,\ 0,\ 0.1,\ 60\right)$

#49: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ 2,\ 0,\ -0.1,\ 60\right)$

Og gennem punktet (1,-1):

#50: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ 1,\ -1,\ 0.1,\ 60\right)$

#51: EULER_ODE$\left(\frac{1}{2}\cdot y,\ x,\ y,\ 1,\ -1,\ -0.1,\ 60\right)$

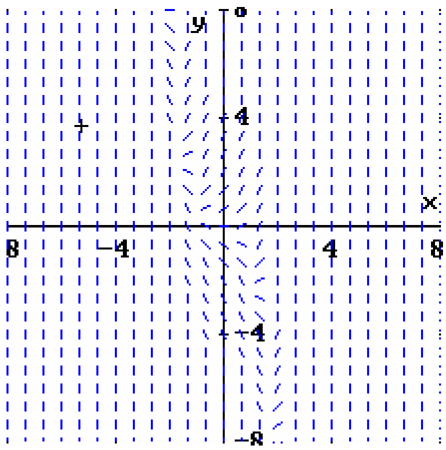


Vi vil nu se på en differentialligning, hvor højre-siden afhænger af både x og y:

#52: $\dfrac{dy}{dx} = y + x^3$

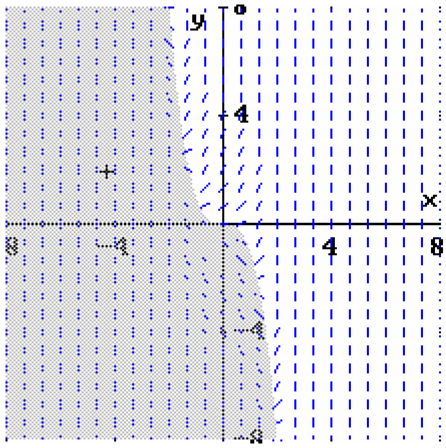
Vi begynder denne gang med at tegne hældningsfeltet:

#53: DIRECTION_FIELD($y + x^3$, x, −8, 8, 24, y, −8, 8, 24)



Umiddelbart er det måske lidt svært at få styr på løsningskurvernes forløb, så lad os igen udnytte, at fortegnet for højre-siden i differentialligningen bestemmer funktionernes monotoniforhold. Vi gør dette ved at markere det område i koordinatsystemet, hvor løsningsfunktionerne er aftagende; dette område er jo bestemt ved

#54: $y + x^3 < 0$



Grænsen mellem de to områder (som her er y = -x^3) er de punkter, hvori en løsningskurve - såfremt den går gennem punktet - har en vandret tangent (da y' = 0). Funktionerne er altså aftagende i venstre side og voksende i højre side.

Som tidligere nævnt findes der numeriske metoder, der er mere nøjagtige end Eulers metode. Vi vil her bruge en af de mest anvendte - en såkaldt fjerde-ordens **Runge-Kutta** metode. Vi skal ikke her komme ind på, hvordan metoden er konstrueret, blot bemærke, at det er en videreudvikling af Eulers metode, og at den heldigvis findes som funktion i Derive:

#55: $\mathrm{RK}([r], [x, y], [x0, y0], h, n)$

Syntaksen er den samme som i EULER_ODE bortset fra de kantede parenteser (som er med pga. at RK kan løse differentiallignings*systemer*).

Lad os tegne nogle af løsningskurverne.

Gennem (0,2):

#56: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [0, 2], 0.1, 100)$

#57: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [0, 2], -0.1, 100)$

Gennem (-2,0):

#58: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [-2, 0], 0.1, 100)$

#59: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [-2, 0], -0.1, 100)$

Gennem (2,1):

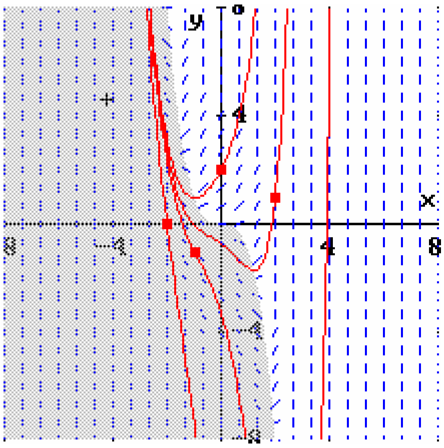
#60: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [2, 1], 0.1, 100)$

#61: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [2, 1], -0.1, 100)$

Gennem (-1,-2):

#62: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [-1, -1], 0.1, 100)$

#63: $\mathrm{RK}([y + x^3], [x, y], [-1, -1], -0.1, 100)$


y
x
4
8
-4
-8

Modeller

Vi skal i det følgende se på, hvordan differentialligninger kan anvendes ved opstillinger af matematiske modeller, hvilket vil sige - under fastlagte forudsætninger - at beskrive dele af virkeligheden. Som antydet vil en matematisk model sjældent kunne beskrive virkeligheden fuldstændigt, hvorfor det er vigtigt ved opstilling af en model at gøre sig klart, hvilke begreber og relationer, der skal indgå. Modelopstillingen kan kort beskrives

1) hvilke antagelser gøres (hvad er relevant og hvad er irrelevant)
2) hvad er den uafhængige variable, hvad er de(n) afhængige variable og hvilke parametre indgår
3) opstil en ligning, der forbinder størrelserne i 2) under antagelserne i 1).

Gennem en række **populationsmodeller** skal vi nu, dels se hvordan modellerne opstilles, dels se hvad modellerne kan fortælle.

Ubegrænset populationsvækst

En simpel model for væksten i en population fås ved at gøre følgende antagelse:
vækstraten er proportional med populationens størrelse
De størrelser, der indgår i beskrivelsen:
t er tiden (den uafhængige variable)
P er populationens størrelse (den afhængige variable)
k er proportionalitetskonstanten (en parameter), her antages k>0
Ud fra dette kan opstilles følgende differentialligning:

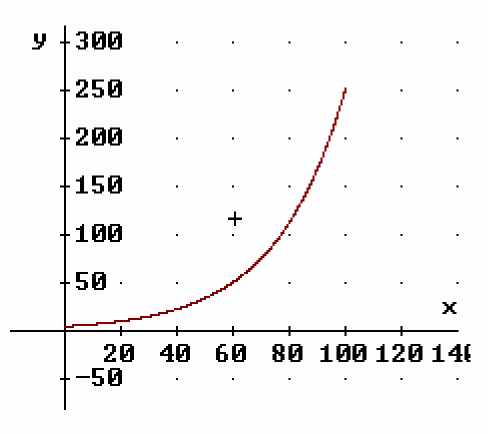
#1: $$\frac{dP}{dt} = k\cdot P$$

Denne type ligning har vi tidligere undersøgt (dy/dx = ½y). De løsningsfunktioner, der er negative, er naturligvis ikke relevante her.
P(t) = 0 er løsning. Dette er en konstant funktion, hvorfor populationen siges at være i **ligevægt**. I dette tilfælde er det en population uden individer. (**Ligevægtsløsninger** optræder generelt, når dy/dx = 0, idet dette jo betyder, at y er konstant).
Normalt i disse modeller sættes det nuværende tidspunkt til t = 0, hvor vi formodes at kende populationens størrelse P_0, dvs. at vi har et punkt $(0,P(0)) = (0,P_0)$, som løsningskurven skal gå igennem. Da det er **begyndelsesværdien**, vi kender, kaldes ligningssystemet

#2: $$\frac{dP}{dt} = k\cdot P \wedge P(0) = Po$$

for et **begyndelsesværdiproblem**.
Sætter vi k = 0.04 og P(0) = 4.6 kan vi bestemme løsningskurven vha. RK:

#3: `RK([0.04·P], [t, P], [0, 4.6], 0.1, 1000)`



Løsningskurven viser, at det ikke blot er ubegrænset vækst, men en vækst, hvor væksthastigheden vokser.

Logistisk populationsvækst

Den forrige model gav ubegrænset vækst, hvilket naturligvis ikke er muligt i længden, idet der sættes begrænsninger i forbindelse med f.eks. plads og fødevarer. Vi ændrer derfor antagelserne til

hvis populationen er lille vil vækstraten være proportional med populationens størrelse
hvis populationen bliver så stor, at den ikke kan ernæres eller opretholdes i området, så vil populationen blive mindre - vækstraten bliver negativ

De størrelser, der indgår i beskrivelsen:

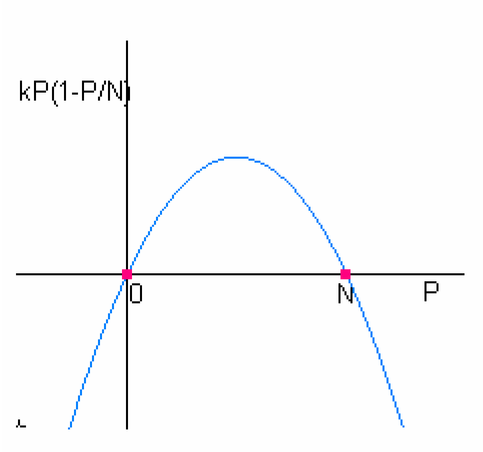
t er tiden (den uafhængige variable)
P er populationens størrelse (den afhængige variable)
k er proportionalitetskonstanten (en parameter), her antages k>0
N er en parameter, der beskriver en "stor" population

Ud fra dette kan opstilles mange forskellige differentialligninger; vi vælger en af de simple

$$\#4: \quad \frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Lad os lige checke, at ligningen svarer til antagelserne. Hvis P er lille er parentesen tæt på 1, så vækstraten er proportional med P (første antagelse). Hvis P er stor (her P>N) bliver parentesen negativ og dermed hele højresiden negativ (da k>0) - altså er vækstraten negativ (anden antagelse).

Højresiden af ligningen er et andengradspolynomium i P med rødderne P = 0 og P = N. Polynomiet har positive værdier mellem rødderne og negative uden for rødderne.



Dette betyder, at vi har to **ligevægtsløsninger**: P(t) = 0 og P(t) = N. Den første løsning svarer som før til en population uden individer, medens den anden svarer til at populationen netop har en størrelse, der kan opretholdes under de givne betingelser, hvorfor parameteren N kaldes **bærekapaciteten**.
Fortegnene for andengradspolynomiet (som jo også er fortegnene for vækstraten) betyder, at løsningsfunktionerne er voksende, hvis P ligger mellem 0 og N og aftagende ellers.
Vi går igen ud fra, at vi har kendskab til populationens størrelse P_0 til tidspunktet t = 0. Vi kan så vha. RK skitsere løsningskurver i de tre situationer $P_0>N$, $0<P_0<N$ og $P_0<0$ (hvor den sidste ikke giver mening i forbindelse med populationer).
Vi sætter k = 0.06 og N = 10; P_0 sættes til henholdsvis 14, 3 og -2.
De to ligevægtsløsninger indtegnes. Derudover tegner vi løsningskurverne både fremad og tilbage i tid.

#5: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, 14], 0.1, 500\right)$

#6: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, 14], -0.1, 200\right)$

#7: $P = 10$

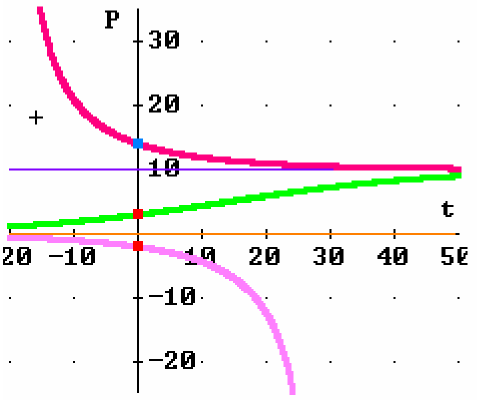
#8: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, 3], 0.1, 500\right)$

#9: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, 3], -0.1, 200\right)$

#10: $P = 0$

#11: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, -2], 0.1, 250\right)$

#12: $\text{RK}\left(\left[0.06\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{10}\right)\right], [t, P], [0, -2], -0.1, 250\right)$



Den øverste løsningskurve viser, at hvis populationen af en eller anden grund er blevet for stor, vil den blive reduceret på en måde så den nærmer sig bærekapaciteten. Den midterste kurve viser også, at populationsstørrelsen nærmer sig bærekapaciteten, hvis den fra starten ligger mellem de to ligevægtspunkter.
Generelt ses, at løsninger nærmer sig ligevægtspunktet P = N (stabil ligevægt) og fjerner sig fra ligevægtspunktet P = 0 (ustabil ligevægt, hvis vi accepterer negative populationsstørrelser).

Modificeret logistisk model

I en række tilfælde, hvor dyr er spredt over et stort område, er det urealistisk at forestille sig, at populationen vokser proportionalt med størrelsen, når populationen er lille. Der vil tværtimod optræde det fænomen, at han og hun har svært ved at finde hinanden, når de skal parre sig. Vi ændrer derfor antagelserne til:

hvis populationen er for stor, vil vækstraten blive negativ
hvis populationen er for lille, vil vækstraten blive negativ
hvis populationen er 0, vil vækstraten være 0.

De størrelser, der indgår i beskrivelsen:

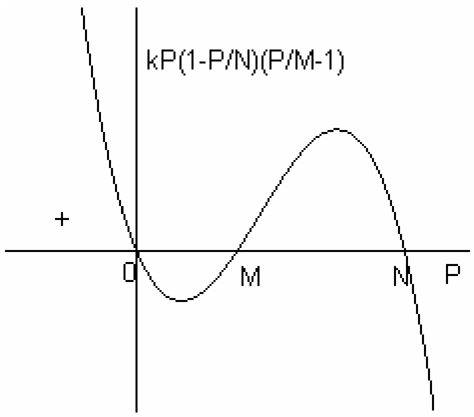
t er tiden (uafhængig variabel)
P er populationens størrelse (afhængig variabel)
k er en proportionalitetskonstant (parameter)
N er bærekapaciteten, som fortæller hvor mange dyr, der kan leve i området (parameter)
M er et udtryk for populationens "spredthed"; populationen kan blive for lille til at kunne formere sig (parameter, M<N).

Ud fra dette kan der igen opstilles forskellige ligninger. Vi vælger en af de forholdsvis simple:

$$\#13: \quad \frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{N}\right) \cdot \left(\frac{P}{M} - 1\right)$$

Vi checker igen, at antagelserne er indeholdt i ligningen. Hvis P er stor (her P>N) bliver den første parentes negativ og den anden positiv, hvorved vækstraten bliver negativ (første antagelse). Hvis P er lille (her 0<P<M) bliver første parentes positiv og anden parentes negativ, hvorved vækstraten bliver negativ (anden antagelse). Hvis P=0, bliver vækstraten 0 (tredje antagelse).

Højresiden er i dette tilfælde et tredjegradspolynomium i P med rødderne P = 0, P = N og P =M.



I dette tilfælde har vi tre ligevægtsløsninger: P(t) = 0, P(t) = M og P(t) = N.
Disse tre løsninger tegnes sammen med løsninger for de fire muligheder for populationsstørrelsen til tiden t=0: P_0>N, M<P_0<N, 0<P_0<M og P_0<0 (igen meningsløs for populationer). Vi sætter k = 0.1, M = 3 og N = 8. Som P0-værdier vælges 10, 4, 2 og -1.

$$\#14:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 10],\ 0.1,\ 300\right)$$

$$\#15:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 10],\ -0.1,\ 30\right)$$

$$\#16:\quad P = 8$$

$$\#17:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 4],\ 0.1,\ 300\right)$$

$$\#18:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 4],\ -0.1,\ 200\right)$$

$$\#19:\quad P = 3$$

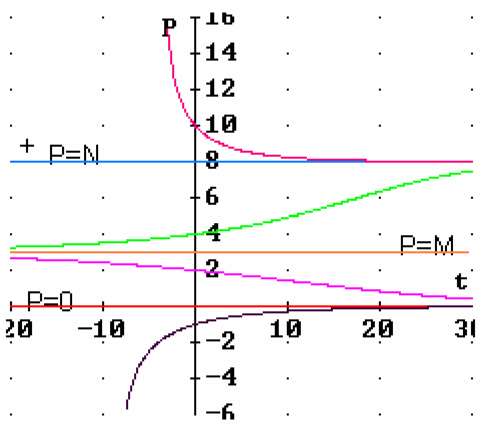
$$\#20:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 2],\ 0.1,\ 300\right)$$

$$\#21:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 2],\ -0.1,\ 200\right)$$

$$\#22:\quad P = 0$$

$$\#23:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ -1],\ 0.1,\ 300\right)$$

$$\#24:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ -1],\ -0.1,\ 75\right)$$



Vi ser her, at P=N og P=0 er stabile ligevægte (løsningskurverne nærmer sig disse værdier), medens P=M er en ustabil ligevægt (løsningskurverne fjerner sig fra denne værdi). Betydningen af dette kan tydeliggøres ved f. eks. at antage, at populationsstørrelsen varierer med årstiden - størrelsen af variationen antages at være proportional med størrelsen af populationen. Dette kan udtrykkes vha. differentialligningen

$$\#25: \quad \frac{dP}{dt} = k\cdot P\cdot\left(1 - \frac{P}{N}\right)\cdot\left(\frac{P}{M} - 1\right) - h\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)$$

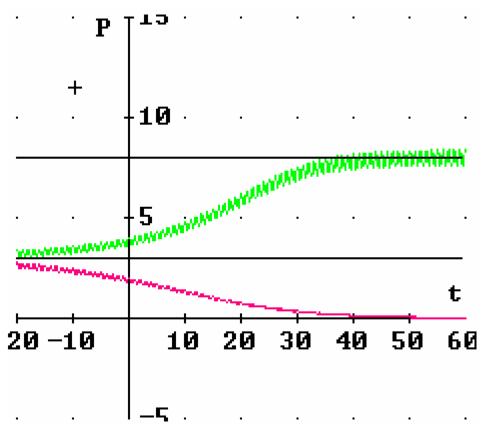
hvor h er en proportionalitetskonstant.
Værdierne for k, M og N bibeholdes, medens h sættes til h=0.3.
Vi tegner først løsningskurven for $P_0=4$ og $P_0=2$:

$$\#26: \quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1 - \frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3} - 1\right) - 0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 4],\ 0.1,\ 600\right)$$

$$\#27: \quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1 - \frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3} - 1\right) - 0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 4],\ -0.1,\ 200\right)$$

$$\#28: \quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1 - \frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3} - 1\right) - 0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 2],\ 0.1,\ 600\right)$$

$$\#29: \quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1 - \frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3} - 1\right) - 0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 2],\ -0.1,\ 200\right)$$



Løsningskurverne følger samme mønster som før, idet de nærmer sig de stabile ligevægte, blot med de tilføjede variationer. Ser vi derimod på begyndelsesværdier, der ligger tæt på den ustabile ligevægt sker der ændringer. Lad os tegne løsningskurverne med begyndelsesværdier P_0=3.15 og P_0=3.14; desuden tegnes kurven for P_0=3.14 uden variationsleddet.

$$\#30:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)-0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 3.15],\ 0.1,\ 1700\right)$$

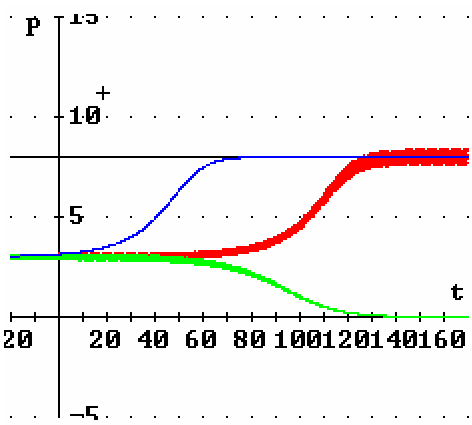
$$\#31:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot p\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)-0.3\cdot p\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ p],\ [0,\ 3.15],\ -0.1,\ 200\right)$$

$$\#32:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot P\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)-0.3\cdot P\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ P],\ [0,\ 3.14],\ 0.1,\ 1700\right)$$

$$\#33:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot p\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)-0.3\cdot p\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right],\ [t,\ p],\ [0,\ 3.14],\ -0.1,\ 200\right)$$

$$\#34:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot p\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ p],\ [0,\ 3.14],\ 0.1,\ 1700\right)$$

$$\#35:\quad \mathrm{RK}\left(\left[0.1\cdot p\cdot\left(1-\frac{P}{8}\right)\cdot\left(\frac{P}{3}-1\right)\right],\ [t,\ p],\ [0,\ 3.14],\ -0.1,\ 200\right)$$



Her ses, at den ustabile ligevægt holdes (med variationerne) i lang, men på et tidspunkt bevæger kurven sig mod en af de stabile ligevægte. En lille ændring af begyndelsesbetingelsen har betydning for, om populationsstørrelsen nærmer sig bærekapaciteten eller 0.

Modeller for blandinger af stoffer

Vi har nu set en række populationsmodeller og set hvordan man gradvis kan udbygge modellerne, så de kan tage højde for forskellige betingelser i den virkelige verden. Vi vil prøve at gøre det samme for en anden stor gruppe modeller: modeller for blanding af stoffer.
Blanding af stoffer udgør et stort praktisk og forskelligartet problem. Eksemplerne spænder fra forurening af søer med et stof over blanding af kemikalier og til diffusionen af cigarrøg i luft.

Blanding af stoffer i en stor beholder

Vi vil opstille en model med disse betingelser:

- En beholder indeholder 100 liter væske. Der løber lige meget væske ind og ud, så der er altid 100 liter i beholderen.
- Der omrøres hele tiden, så koncentrationen af sukker er ens overalt i beholderen.
- Sukkervand, som indeholder 5 spiseskefulde sukker pr. liter løber ind i beholderen via en hane A med en hastighed på 2 liter/min.
- Sukkervand som indeholder 10 spiseskefulde sukker pr. liter løber ind ad hane B med en hastighed på 1 liter/min.
- Sukkervand forlader beholderes gennem hane C med en hastighed på 3 liter/min.

Vi vil lade t være tiden målt i minutter (uafhængig variabel). For den afhængige variabel har vi to valgmuligheder. Vi kan vælge at følge den totale mængde sukker, *S*(t), målt i antal spiseskefulde, eller vi kan vælge at følge koncentrationen, *C(*t), til tiden t målt i spiseskefulde/liter. Vi tager her modellen for S.
Med *S*(t) som den afhængige variabel skal vi opstille et udtryk for den hastighed, hvormed *S* ændres pr. minut. Hastigheden må være forskellen mellem hvor meget sukker der løber ind og hvor meget der løber ud. Det er let nok at finde ud af hvor meget (spiseskefulde/min) der løber ind: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 20$.
Det er lidt sværere at finde ud af, hvor meget der løber ud pr. minut, idet det afhænger af koncentrationen af sukker i beholderen. Men koncentrationen må være *S/100*, da der er 100 liter i beholderen og *S* angiver jo hele tiden den øjeblikkelige mængde sukker målt i skefulde.
Den mængde spiseskefulde, der løber ud er altså:

$$3 \cdot \frac{S}{100}$$

Differentialligningen kan nu opstilles som

$$\frac{dS}{dt} = 20 - 3\frac{S}{100} = \frac{2000 - 3S}{100}$$

Læg mærke til at differentialligningen er af typen

$$\frac{dS}{dt} = b - a \cdot S$$

Den type vil du komme til at høre mere om senere.

En forurenet sø

Vi har en sø med oprindelig 10.000 m^3 uforurenet vand. Der er to vandløb A og B som løber til søen. Der er et vandløb C, som forlader søen. Vi antager at der løber 500 m^3 ind pr. dag via A, 750 m^3 ind via B og 1250 m^3 ud via C.

Til tiden $t = 0$ begynder A at blive forurenet med vejsalt i en koncentration på 5 kg/1000 m^3. Vi antager at dette salt efter at være løbet ind i søen fordeler sig jævnt. På nuværende tidspunkt minder problemet om det vi lige har set på med karret.
Men hvad værre er, så begynder man at forurene B med affald (50 m^3 om dagen), som lægger sig på bunden af søen. Søen flyder ikke over, men strømmen ud af søen øges til 1300 m^3/dag.

Med den afhængige variabel S(t), som angiver mængden af salt i søen, skal vi opstille et udtryk for den hastighed, hvormed S ændres pr. dag. Hastigheden må være forskellen mellem hvor meget salt der løber ind og hvor meget der løber ud.
Det daglige indløb af salt må være: $500 \cdot \frac{5}{1000} = \frac{5}{2}$ kg/dag .
Den hastighed hvormed saltet forlader søen er koncentrationen af salt i søen ganget med den hastighed vandet har i C. Koncentrationen af salt i søen er dog i forhold til beholderopgaven oven for lidt sværere at udregne idet vandvolumen ikke er konstant, da søen langsomt bliver fyldt op af affald. Vandvolumen må være 10.000 – 50t.
Derfor bliver hastigheden hvormed saltet forlader søen:

$$1300\left(\frac{S}{10000-50t}\right) = \frac{26S}{200-t}$$

Differentialligningen, der modellerer mængden af salt i søen er derfor:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{5}{2} - \frac{26S}{200-t}$$

Modellen er kun holdbar så længe der er vand i søen, så $10000-50t \geq 0$ så vi kan fastlægge $Dm(S)$ = [0;200].

Øvelse:
Tegn hældningsfeltet for ligningen.
Tegn løsningen for $S(0) = 0$ og kommenter forløbet.
Prøv at tegne koncentrationen af salt i søen som funktion af tiden:

$$C(t) = \frac{S(t)}{V(t)} = \frac{S(t)}{10000-50t}$$

Tip: Spørg læreren om hvordan man finder et funktionsudtryk for S(t) ved at løse differentialligningen. Differentialligninger af denne type kaldes **lineære**.

Et kar med sukkervand der til sidst løber over

Vi vil se på endnu en variation over temaet og opstille en model for en 10 liters beholder med 4 liter rent vand. Til tiden $t = 0$ begynder vi at hælde 0,25 kg sukker/min og 2 liter vand/min i beholderen. Der er et udløb, hvor der løber sukkervand ud med en hastighed på 1 liter/min. Igen forudsætter vi at sukkeret fordeles jævnt i beholderen.
Med den afhængige variabel S(t), som angiver mængden af sukker i beholderen, skal vi opstille et udtryk for den hastighed, hvormed S ændres pr. min. Hastigheden må være forskellen mellem hvor meget sukker der løber ind og hvor meget der løber ud.
Indløbet af sukker må være 0,25 kg/min. Den hastighed hvormed sukkeret forlader beholderen er koncentrationen af sukker i beholderen ganget med den hastighed vandet løber ud. Vandvolumen i beholderen er ikke konstant. Vandvolumen må hele tiden være $4+2t-t=4+t$

Differentialligningen som dækker ændringen af sukkermængden i beholderen er derfor:

$$\frac{dS}{dt} = 0.25 - \frac{S}{4+t}$$

Beholderen vil flyde over når 4 + t = 10, altså når t = 6.

Øvelse:
Tegn hældningsfeltet for ligningen.
Tegn løsningen for $S(0) = 0$ og kommenter forløbet.
Prøv at tegne koncentrationen af sukkeret i beholderen som funktion af tiden:

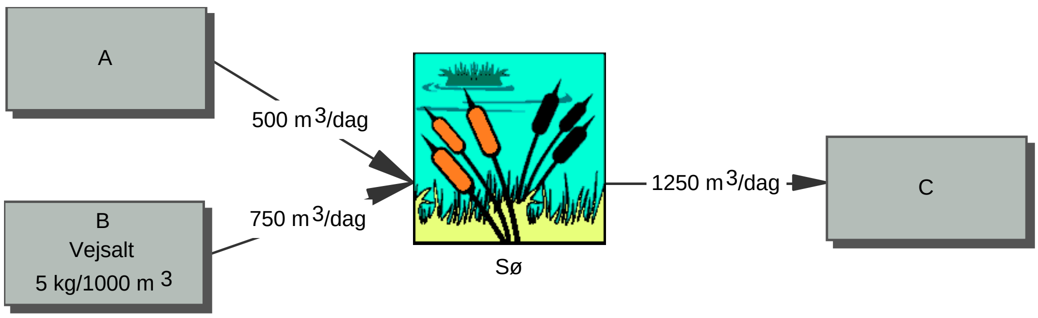
$$C(t) = \frac{S(t)}{V(t)} = \frac{S(t)}{4+t}$$

Tip: Spørg læreren om hvordan man finder et funktionsudtryk for S(t). (Det er også en **lineær** differentialligning vi skal løse i dette tilfælde)

Hvordan opstiller man modeller?

Efter at have set så mange modeller kan vi begynde at danne os nogle generelle ideer om, hvordan man opstiller differentialligningsmodeller.

Den første afledede kan tolkes som noget med hastighed. Så når vi opstiller differentialligningen udtrykker vi, at vi ved noget om hastigheden hvormed noget ”stof” udvikler sig. Dette abstrakte begreb ”stof” kan være mange ting. Vi har foreløbig set på en population og mængden af et eller andet kemisk stof i en tank.
Først og fremmest gælder det altså om at fokusere på, at vi skal have fat i nogle ”strømme”. Det er ofte frugtbart at tænke på at holde styr på hastigheden hvormed noget strømmer ind og hastigheden hvormed noget strømmer ud.
Det hjælper at tegne en lille skitse, hvor man starter med en kasse, som udgør det ”stof”, modellen skal sige noget om. Hvis det skal være fint kalder man det et ”kompartment” og modellerne for ”kompartmentmodeller”. Man kan så sætte tilløb og udløb på denne kasse og på den måde få sig et billede af de strømme, der har betydning for indholdet i kassen. Differentialligningsmodellen opstilles ud fra disse tilløb og udløb.



Figur 1 Begyndelsen til en kompartmentmodel for den forurenede sø. Man prøver at få styr på de forskellige tilløb og udløb

I karmodellerne (eller søen som vist på figur 1) kunne vi direkte udregne hastigheden af det stof, der kom ind som ”tilløb” og trak så hastigheden af det stof som løb væk fra.
I populationsmodeller kan man tilsvarende have led, der angiver fødsler, og led der angiver dødsfald. Sat sammen giver de så en model for populationsvækst. Imidlertid kan man også opstille modeller ud fra en antagelse om at populationen vokser på en bestemt måde, fx. proportional med antallet af individer. Så på den måde har vi fat i ”tilløbet”. Der kan også i disse modeller være et ”udløb” i form af fangst, som man så kan sætte på som et negativt led.

Når man så opstiller modellerne skal man have øje for de forskellige dele:

- **den uafhængige variabel**, som i modeller ofte er tiden og som vi derfor kalder t,
- **den afhængige variabel** som vi kalder ved et stort bogstav, fx P for population og S for sukker eller salt.
- **parametre**, som typisk er nogle proportionalitetskonstanter eller mere generelt hastighedskonstanter, som kan bruges til at kalibrere modellen med. Fx vokser mange forskellige populationer efter den logistiske model, men med forskellige hastigheder. Elefantpopulationer er en del langsommere end bakterier. Med hensyn til fortegn på parametrene kan man passende sætte parameterværdier der øger mængden af stof som positive og de værdier der knytter sig til fjernelsen af stof som negative.

Analytiske løsninger

I nogle tilfælde kan man bestemme regneforskrifter for løsninger til en differentialligning

$$y' = g(x,y)$$

man taler om at løse differentialligningen analytisk.

I *DERIVE* skal man omskrive differentialligningen til:

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0, \qquad \text{dvs.}$$

$$g(x,y) + (-1)y' = 0$$

og derefter benytte DSOLVE1_GEN-funktionen:

```
#1:   g(x, y) :=

#2:   DSOLVE1_GEN(g(x, y), -1, x, y, c)
```

for at få den generelle løsning.

For at bestemme løsningen gennem (x0,y0) kan man bruge DSOLVE1-funktionen:

#3: $\text{DSOLVE1}(g(x, y), -1, x, y, x_0, y_0)$

Med eksemplet fra kapitel 1

#4: $\dfrac{dy}{dx} = y + x^3$ (se fodnote[3])

fås

#5: $\text{DSOLVE1}(y + x^3, -1, x, y, 0, 2)$

der giver

#6: $\hat{e}^{-x}\cdot(x^3 + 3\cdot x^2 + 6\cdot x + y + 6) = 8$

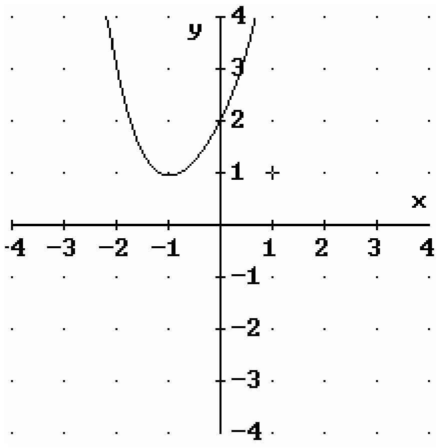
som nu løses med hensyn til y

#7: $\text{SOLVE}(\hat{e}^{-x}\cdot(x^3 + 3\cdot x^2 + 6\cdot x + y + 6) = 8, y)$

#8: $y = 8\cdot\hat{e}^{x} - x^3 - 3\cdot(x^2 + 2\cdot x + 2)$

Tegnes grafen, fås

[3] I #4 og mange gange på de følgende sider bruger vi det trick at skrive linjen med anførselstegn: “dy”/”dx”=y + x^3. Her fungerer Derive udelukkende som en skrivemaskine. Derive kan ikke ”forstå” linjen som en differentialligning. I #5 bringes den på en form, som Derive kan ”forstå”.



Prøves med

#9: $\text{DSOLVE1\_GEN}(y + x^3, -1, x, y, c)$

fås

#10: $$ê^{-x}\cdot(x^3 + 3\cdot x^2 + 6\cdot x + y + 6) = -c$$

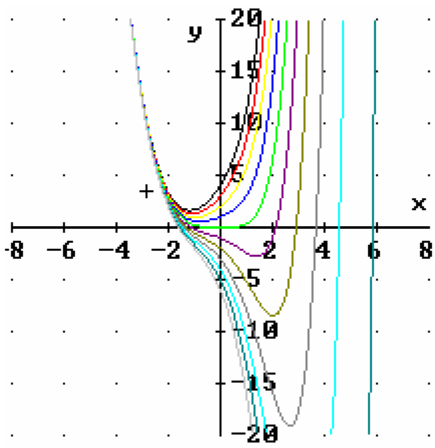
der giver

#11: $\text{SOLVE}(ê^{-x}\cdot(x^3 + 3\cdot x^2 + 6\cdot x + y + 6) = -c, y)$

#12: $$y = -c\cdot ê^{x} - x^3 - 3\cdot(x^2 + 2\cdot x + 2)$$

Tegnes nogle af graferne, fås

#13: $\text{VECTOR}(y = -c\cdot ê^{x} - x^3 - 3\cdot(x^2 + 2\cdot x + 2), c, -10, 0, 1)$



der kan sammenlignes med figuren på side 14.

Prøver vi nu at løse differentialligningen

#14: $$\frac{dp}{dt} = kp$$

som model for ubegrænset populationsvækst med k = 0.04 og P(0)= 4.6 , fås

#15: DSOLVE1(0.04·p, –1, t, p, 0, 4.6)

hvilket giver

#16: $$25\cdot LN(p) - t = 25\cdot LN\left(\frac{23}{5}\right)$$

og dermed

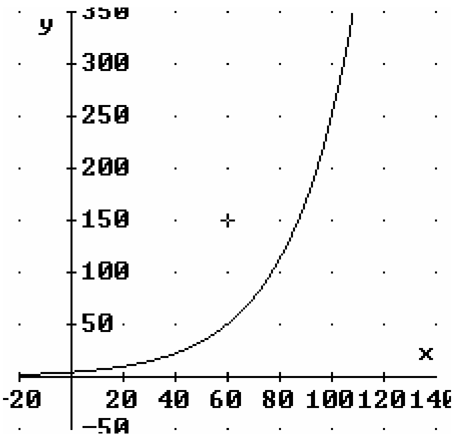
#17: $$SOLVE\left(25\cdot LN(p) - t = 25\cdot LN\left(\frac{23}{5}\right), p\right)$$

#18: $$p = \frac{23\cdot \hat{e}^{t/25}}{5}$$

eller

#19: $$p = 4.6\cdot \hat{e}^{0.04\cdot t}$$

altså en eksponentiel udvikling. Nedenfor ses grafen.



Ofte bruger man "neutrale" betegnelser som x for den uafhængige og y for den afhængige variable.

Differentialligningen til beskrivelse af den ubegrænsede populationsvækst bliver da:

#20: $$\frac{dy}{dx} = ky$$

hvortil samtlige løsninger bestemmes i det følgende afsnit a)

Temperaturen for kaffe i en kop ændrer sig med tiden og forsøg har vist, at den hastighed, hvormed temperaturen h ændrer sig, er proportional med forskellen mellem h og omgivelsernes temperatur h0, altså

#21: $$\frac{dh}{dt} = - k\cdot (h - h_0)$$

hvor k er en positiv konstant. Med "neutrale" betegnelser fås

#22: $$\frac{dy}{dx} = - k\cdot (y - y_0)$$

eller

#23: $$\frac{dy}{dx} = ky_0 - ky$$

Med a=k og b=ky0 fås

#24: $$\frac{dy}{dx} = b - ay$$

hvortil samtlige løsninger bestemmes i det følgende afsnit b)

For den logistiske populationsvækst fås med "neutrale" betegnelser

#25: $$\frac{dy}{dx} = ky\cdot\left(1 - \frac{y}{n}\right)$$

eller

#26: $$\frac{dy}{dx} = y\cdot\left(k - \frac{k}{n}\cdot y\right)$$

eller

#27: $$\frac{dy}{dx} = y\cdot(b - ay)$$

hvor bærekapaciteten n bliver bestemt ved

#28: $$n = \frac{k}{\frac{k}{n}} = \frac{b}{a}$$

Samtlige løsninger til

#29: $$\frac{dy}{dx} = y\cdot(b - ay)$$

bestemmes i det følgende afsnit c)

Bevismetoden i de tre følgende afsnit a), b) og c) kan beskrives som følger: For hver type differentialligning anføres regneforskrifter for løsninger, og der gøres prøve; en vilkårlig (vild?) løsning f kombineres med en anført (tam?) løsning til en hjælpefunktion g. Det viser sig så, at en regneforskrift for g kan findes, og dermed er f "fanget".

Differentialligninger af typen: $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$

Differentialligningen

#1: $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$

behandles først.

Alle funktionerne med regneforskriften

#2: $f(x) := c \cdot ê^{k \cdot x}$

er løsninger, for venstre side giver:

#3: $f'(x)$

#4: $c \cdot k \cdot ê^{k \cdot x}$

og højre side giver:

#5: $k \cdot f(x)$

#6: $c \cdot k \cdot ê^{k \cdot x}$

Er omvendt f(x) en løsning, som vi ikke umiddelbart kender regneforskriften for, ses på en hjælpefunktion g(x):

#7: $f(x) :=$

#8: $g(x) := f(x) \cdot ê^{- k \cdot x}$

Så differentieres g:

#9: $g'(x)$

#10: $ê^{- k \cdot x} \cdot (f'(x) - k \cdot f(x))$

Da f er en løsning til differentialligningen, er

#11: $f'(x) = k \cdot f(x)$

altså er parentesen nul. Så er g(x) en funktion med

#12: $g'(x) = 0$

for alle x og dermed er g(x) konstant lig med c,

#13: $g(x) = c$

for alle x. Men så er

#14: $f(x) \cdot ê^{- k \cdot x} = c$

for alle x. Dvs.

#15: $f(x) = c \cdot \hat{e}^{k \cdot x}$

Eksempel:
Samtlige løsninger til differentialligningen

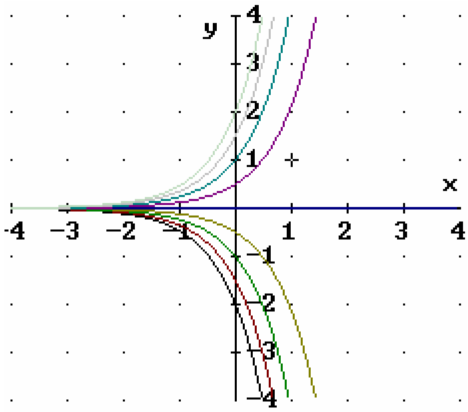
#16: $\frac{dy}{dx} = 1.45 \cdot y$

er funktionerne af formen:

#17: $f(x) = c \cdot \hat{e}^{1.45 \cdot x}$

Nu tegnes nogle af graferne:

#18: $\text{VECTOR}(y = c \cdot \hat{e}^{1.45 \cdot x}, c, -2, 2, 0.5)$



Bemærk, at for c > 0 opnås løsninger y med y > 0,
for c = 0 opnås løsningen y = 0 og
for c < 0 opnås løsninger y med y < 0.

Endvidere vil der for ethvert punkt (x0,y0) i planen findes en og kun én løsning med f(x0)=y0, dvs. grafen for f går gennem punktet.
I ligningen

#19: $y_0 = c \cdot \hat{e}^{k \cdot x_0}$

kan c nemlig findes ved:

#20: $\text{SOLVE}\left(y_0 = c \cdot \hat{e}^{k \cdot x_0}, c\right)$

#21: $c = \hat{e}^{-k \cdot x_0} \cdot y_0$

Differentialligninger af typen: $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$

Nu behandles differentialligningen

$$\#1: \quad \frac{dy}{dx} = b - ay$$

hvor a>0.

Alle funktionerne med regneforskriften

$$\#2: \quad f(x) := \frac{b}{a} - c \cdot \hat{e}^{-a \cdot x}$$

er løsninger, for venstre side giver:

$$\#3: \quad f'(x)$$

$$\#4: \quad a \cdot c \cdot \hat{e}^{-a \cdot x}$$

og højre side side giver:

$$\#5: \quad b - a \cdot f(x)$$

$$\#6: \quad a \cdot c \cdot \hat{e}^{-a \cdot x}$$

Er omvendt f(x) en løsning, som vi ikke umiddelbart kender regneforskriften for, ses på en hjælpefunktion g(x):

$$\#7: \quad f(x) :=$$

$$\#8: \quad g(x) := \frac{b}{a} - f(x)$$

Så differentieres g:

$$\#9: \quad g'(x)$$

$$\#10: \quad - f'(x)$$

Da f er en løsning til differentialligningen, er

$$\#11: \quad f'(x) = b - a \cdot f(x)$$

Altså er

$$\#12: \quad g'(x) = - (b - a \cdot f(x)) = (-a) \cdot \left(\frac{b}{a} - f(x) \right)$$

og dermed er

$$\#13: \quad g'(x) = (-a) \cdot g(x)$$

Funktionen g er altså løsning til differentialligningen

$$\#14: \quad \frac{dy}{dx} = (-a) \cdot y$$

Af det foregående følger så, at

$$\#15: \quad g(x) = c\cdot\hat{e}^{(-a)\cdot x}$$

altså, at

$$\#16: \quad \frac{b}{a} - f(x) = c\cdot\hat{e}^{(-a)\cdot x}$$

for alle x og sættes

$$\#17: \quad y = f(x)$$

fås

$$\#18: \quad \frac{b}{a} - y = c\cdot\hat{e}^{(-a)\cdot x}$$

$$\#19: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\frac{b}{a} - y = c\cdot\hat{e}^{(-a)\cdot x}, y\right)$$

$$\#20: \quad y = \frac{b}{a} - c\cdot\hat{e}^{-a\cdot x}$$

altså

$$\boxed{\#21: \quad f(x) = \frac{b}{a} - c\cdot\hat{e}^{-a\cdot x}}$$

Eksempel:
Samtlige løsninger til differentialligningen

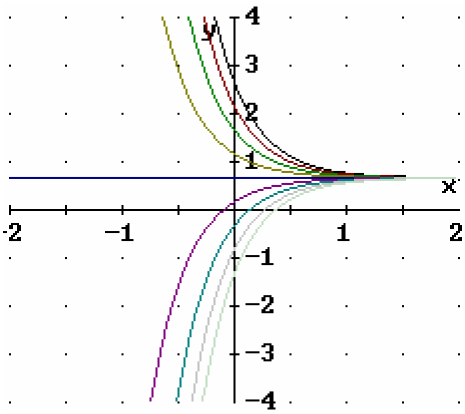
$$\#22: \quad \frac{dy}{dx} = 2 - 3\cdot y$$

er funktionerne af formen:

$$\#23: \quad f(x) = \frac{2}{3} - c\cdot\hat{e}^{-3\cdot x}$$

Af differentialligningen ses, at for $y < 2/3$ er $2-3y > 0$ og løsninger er i dette område derfor voksende; tilsvarende ses, at $y = 2/3$ er løsning samt, at for $y > 2/3$ er løsningerne aftagende. Nu tegnes nogle af graferne:

$$\#24: \quad \mathrm{VECTOR}\left(y = \frac{2}{3} - c\cdot\hat{e}^{-3\cdot x}, c, -2, 2, 0.5\right)$$



Af

#25: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3} - c\cdot ê^{-3\cdot x}\right)$$

#26: $$\frac{2}{3}$$

ses, at linjen med ligningen y = 2/3 er vandret asymptote til grafen for f.

Endvidere vil der for ethvert punkt (x0,y0) i planen findes en og kun én løsning med f(x0)=y0,
Dvs. grafen for f går gennem punktet.
I ligningen

#27: $$y_0 = \frac{b}{a} - c\cdot ê^{-a\cdot x_0}$$

kan c nemlig findes ved:

#28: $$\text{SOLVE}\left(y_0 = \frac{b}{a} - c\cdot ê^{-a\cdot x_0}, c\right)$$

#29: $$c = \frac{ê^{a\cdot x_0}\cdot(b - a\cdot y_0)}{a}$$

Generelt gælder, at linjen med ligningen y = b/a er vandret asymptote til graferne for løsninger.
For y < b/a er løsningerne voksende, svarende til c > 0,
funktionen y = b/a er løsning, svarende til c = 0 og
for y > b/a er løsningerne aftagende, svarende til c < 0.

Differentialligninger af typen: $\frac{dy}{dx} = y(b - a \cdot y)$

Endelig behandles differentialligningen

#1: $$\frac{dy}{dx} = y\cdot(b - ay)$$

hvor a>0.

Det ses, at y = 0 og y = b/a er løsninger.

Alle funktionerne med regneforskriften

#2: $$f(x) := \frac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot ê^{- b\cdot x}}$$

er løsninger (y = b/a svarer til c = 0), for venstre side giver:

#3: $f'(x)$

#4: $$\frac{b^2\cdot c\cdot ê^{b\cdot x}}{a\cdot(ê^{b\cdot x} + c)^2}$$

og højre side giver:

#5: $f(x)\cdot(b - a\cdot f(x))$

#6: $$\frac{b^2\cdot c\cdot ê^{b\cdot x}}{a\cdot(ê^{b\cdot x} + c)^2}$$

Er omvendt f(x) en løsning, som vi ikke umiddelbart kender regneforskriften for, og som ikke er 0 for noget x, ses på en hjælpefunktion g(x):

#7: $f(x) :=$

#8: $$g(x) := \frac{\frac{b}{a}}{f(x)} - 1$$

Hvis y = f(x) opfylder, at 0 < y < b/a er

#9: $$\frac{\frac{b}{a}}{f(x)} > 1$$

og dermed er g(x) > 0 for alle x.

Så differentieres g:

#10: $g'(x)$

#11: $$-\frac{b\cdot f'(x)}{a\cdot f(x)^2}$$

Da f er en løsning til differentialligningen, er

#12: $f'(x) = f(x)\cdot(b - a\cdot f(x))$

Altså er

#13: $$g'(x) = -\frac{b\cdot f(x)\cdot(b - a\cdot f(x))}{a\cdot f(x)^2}$$

der omformes til

#14: $$g'(x) = b - \frac{b^2}{a\cdot f(x)}$$

og dermed

#15: $$g'(x) = -b\cdot\left(-1 + \frac{\frac{b}{a}}{f(x)}\right)$$

altså

#16: $g'(x) = -b\cdot g(x)$

Funktionen g har derfor regneforskriften

#17: $g(x) = c\cdot ê^{-b\cdot x}$

hvor c > 0 og dermed

#18: $$\frac{\frac{b}{a}}{f(x)} - 1 = c\cdot ê^{-b\cdot x}$$

sættes

#19: $y = f(x)$

fås

#20: $$\frac{\frac{b}{a}}{y} - 1 = c\cdot ê^{-b\cdot x}$$

#21: $$\text{SOLVE}\left(\frac{\frac{b}{a}}{y} - 1 = c\cdot ê^{-b\cdot x}, y\right)$$

#22: $$y = \frac{b\cdot ê^{b\cdot x}}{a\cdot(ê^{b\cdot x} + c)}$$

altså

$$\#23:\quad f(x) = \frac{\frac{b}{a}\cdot e^{b\cdot x}}{e^{b\cdot x} + c}$$

Forkortes med

$$\#24:\quad e^{b\cdot x}$$

fås i tælleren

$$\#25:\quad \frac{\frac{b}{a}\cdot e^{b\cdot x}}{e^{b\cdot x}}$$

$$\#26:\quad \frac{b}{a}$$

og i nævneren

$$\#27:\quad \frac{e^{b\cdot x} + c}{e^{b\cdot x}}$$

$$\#28:\quad c\cdot e^{-b\cdot x} + 1$$

Endelig er løsningerne altså givet ved:

$$\#29:\quad f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot e^{-b\cdot x}}$$

hvor c > 0 eller

$$\#30:\quad f(x) = 0$$

Det ses, at løsningerne er defineret for alle x, idet

$$\#31:\quad 1 + c\cdot e^{-b\cdot x} > 0$$

for alle x.

Uden for området 0 < y < b/a kan ovenstående gennemføres på samme måde, og der opnås samme regneforskrift

$$\#32:\quad f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot e^{-b\cdot x}}$$

men hvor c < 0 med et enkelt x-sted, hvor funktionen ikke er defineret:

$$\#33:\quad 1 + c\cdot e^{-b\cdot x} = 0$$

#34: $$x = -\frac{\mathrm{LN}\left(-\frac{1}{c}\right)}{b}$$

Eksempel:
Samtlige løsninger til differentialligningen

#35: $$\frac{dy}{dx} = y\cdot(2 - 3\cdot y)$$

er funktionerne af formen:

#36: $$f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + c\cdot ê^{-3\cdot x}}$$

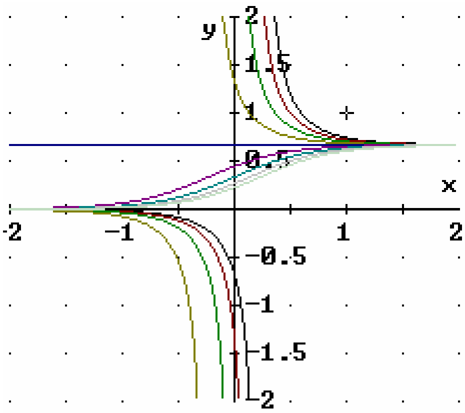
eller

#37: $$f(x) = 0$$

Af differentialligningen ses, at for y < 0 er y(2-3y) < 0 og løsninger er i dette område aftagende, for 0 < y < 2/3 er løsninger voksende og endelig er løsninger
med y > 2/3 aftagende.

Nu tegnes nogle af graferne:

#38: $$\mathrm{VECTOR}\left(y = \frac{\frac{2}{3}}{1 + c\cdot ê^{-3\cdot x}},\ c,\ -2,\ 2,\ 0.5\right)$$



Af

#39: $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{3}}{1 + c\cdot ê^{-3\cdot x}}$$

#40: $$0$$

og

#41: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{3}}{1 + c\cdot \hat{e}^{-3\cdot x}}$

#42: $\dfrac{2}{3}$

ses, at linjerne med ligningerne y = 0 og y = 2/3 er vandrette asymptoter til alle grafer for løsninger.

Endvidere vil der for ethvert punkt (x0,y0), hvor y0 ikke er 0 eller b/a, findes en og kun én løsning med f(x0)=y0, dvs. grafen for f går gennem punktet.
I ligningen

#43: $y_0 = \dfrac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot \hat{e}^{-b\cdot x_0}}$

kan c nemlig findes ved:

#44: $\mathrm{SOLVE}\left(y_0 = \dfrac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot \hat{e}^{-b\cdot x_0}}, c\right)$

#45: $c = \hat{e}^{b\cdot x_0}\cdot\left(\dfrac{b}{a\cdot y_0} - 1\right)$

Generelt gælder, at linjerne med ligningerne y = 0 og y = b/a er vandrette asymptoter til graferne for løsninger.
For 0 < y < b/a er løsningerne voksende, svarende til c > 0.

Differentialligninger som kan løses ved separation af de variable

Separation af de variable er en løsningsmetode, der kan bruges, hvis højresiden i differential-ligningen

$$\#1: \quad \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

er et produkt af funktionerne p og q, hvor p afhænger af x alene, og q afhænger af y alene, altså

$$\#2: \quad \frac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y)$$

Opfattes venstresiden nu som en almindelig brøk, ganges på begge sider med dx og divideres (under passende forudsætninger om, at q(y) ikke er 0) med q(y) på begge sider, fås

$$\#3: \quad \int \frac{1}{q(y)}\, dy = \int p(x)\, dx$$

Nu findes stamfunktionerne på begge sider af lighedstegnet, og der skal så løses med hensyn til y.

I *DERIVE* kan man bruge SEPARABLE_GEN-funktionen:

SEPARABLE_GEN(p(x),q(y),x,y,c)

for at få den generelle løsning.

For at få løsningen gennem (x0,y0) kan man bruge SEPARABLE-funktionen:

SEPARABLE(p(x),q(y),x,y,x0,y0)

Med eksemplet fra tidligere, nu med "neutrale" betegnelser, fås

$$\#4: \quad \frac{dy}{dx} = 0.04 \cdot y$$

med x=0 og y=4.6

#5: SEPARABLE(0.04, y, x, y, 0, 4.6)

$$\#6: \quad \mathrm{LN}\left(\frac{5 \cdot y}{23}\right) = \frac{x}{25}$$

der løses med hensyn til y

$$\#7: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{LN}\left(\frac{5 \cdot y}{23}\right) = \frac{x}{25},\ y,\ \mathrm{Real}\right)$$

#8: $$y = \frac{23 \cdot \hat{e}^{x/25}}{5}$$

eller

#9: $$y = 4.6 \cdot \hat{e}^{0.04 \cdot x}$$

Man skal være lidt forsigtig, idet ln er den komplekse logaritmefunktion. I ovenstående eksempel har det ingen betydning.

Prøves med

#10: $$\frac{dy}{dx} = - 0.04 \cdot y$$

med samme begyndelsesbetingelse, fås

#11: SEPARABLE(0.04, y, x, y, 0, -4.6)

#12: $$\mathrm{LN}\left(\frac{5 \cdot y}{23}\right) - \pi \cdot \hat{\imath} = \frac{x}{25}$$

#13: $$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{LN}\left(\frac{5 \cdot y}{23}\right) - \pi \cdot \hat{\imath} = \frac{x}{25}, y, \mathrm{Real}\right)$$

#14: $$y = - \frac{23 \cdot \hat{e}^{x/25}}{5}$$

eller

#15: $$y = - 4.6 \cdot \hat{e}^{0.04 \cdot x}$$

I dette eksempel benytter *DERIVE* kompleks aritmetik i forløbet, men det får ingen betydning for facit.

Når man bruger separation til løsning af differentialligninger, skal man løse i hvert område af formen, hvor

x tilhører definitionsmængden for p
y tilhører et interval, hvori q(y) ikke er 0

Skal man bestemme en løsning gennem et bestemt punkt (x0,y0), "udpeger" dette punkt området.

Skal man eksempelvis bestemme den løsning f(x) til

#16: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 1}{x + 2}$$

der opfylder, at f(2)=3, er området bestemt ved, at x>-2 og y>1, og vi får

#17: $$\mathrm{SEPARABLE}\left(\frac{1}{x + 2}, y - 1, x, y, 2, 3\right)$$

#18: $$\mathrm{LN}\left(\frac{y-1}{2}\right) = \mathrm{LN}\left(\frac{x+2}{4}\right)$$

#19: $$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{LN}\left(\frac{y-1}{2}\right) = \mathrm{LN}\left(\frac{x+2}{4}\right),\ y,\ \mathrm{Real}\right)$$

#20: $$y = \frac{x+4}{2}$$

altså

#21: $$f(x) := \frac{x+4}{2} \wedge x > -2$$

Definitionsmængden for en løsning f gennem (x0,y0) fastlægges som det største delinterval af fællesmængden af definitionsmængden for p og for f, der indeholder x0.

Lav din egen formelsamling

I *DERIVE* kan man lave sin egen lille formelsamling (gem den evt. som en .mth fil):

Man definerer funktionerne dif1, dif2 og dif3 ved:

#1: $\mathrm{dif1}(k, x) := c\cdot \hat{e}^{k\cdot x}$

altså løsninger til y' = ky

#2: $\mathrm{dif2}(a, b, x) := \frac{b}{a} - c\cdot \hat{e}^{-a\cdot x}$

altså løsninger til y'= b-ay

#3: $\mathrm{dif3}(a, b, x) := \frac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot \hat{e}^{-b\cdot x}}$

altså løsninger til y'=y(b-ay)

Eksempelvis fås løsningen f til differentialligningen y'= 2-3y

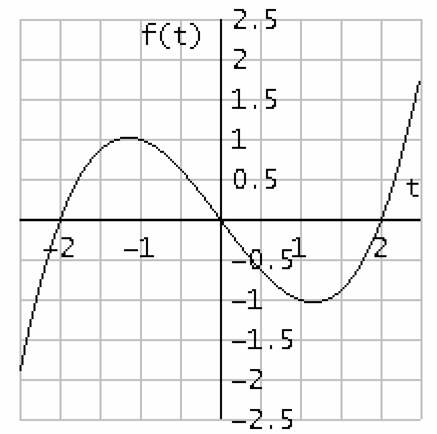
#4: $f(x) := \mathrm{dif2}(3, 2, x)$

#5: $f(x) := \frac{2}{3} - c\cdot \hat{e}^{-3\cdot x}$

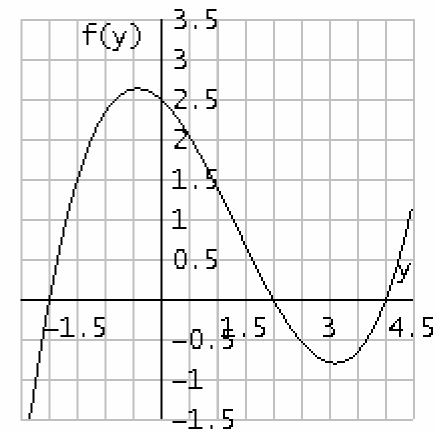
Opgaver

1. Vi ved at grafen på figuren til opgave 1 er grafen for *f(t)* i differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(t)$.

Lav en skitse af hældningsfeltet for denne differentialligning.



Opgave 1 ##

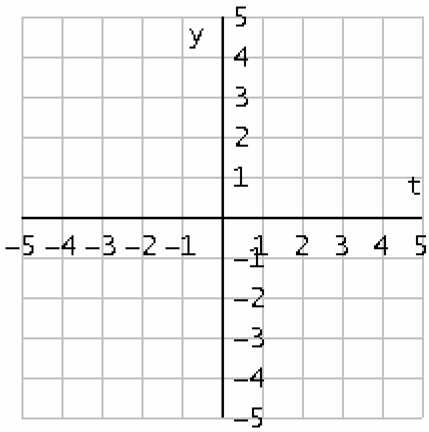


Opgave 2

2. Vi ved at grafen på figuren til opgave 2 er grafen for *f(y)* i differentialligningen $\frac{dy}{dt} = f(y)$.

Lav en skitse af hældningsfeltet for denne differentialligning.

3. Denne opgave løses uden brug af computer. Du skal have udleveret tre A4-ark med en forstørrelse af dette koordinatsystem:



Tegn hældningsfelter hørende til følgende tre differentialligninger i koordinatsystemets gitterpunkter.

(1) $\frac{dy}{dt} = t \cdot (y - 2)$

(2) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$

(3) $\frac{dy}{dt} = \frac{y \cdot t + 2y}{t}$

Marker voksende og aftagende på tegningerne.
For (1) tegnes løsningskurver gennem (2,0), (-2,3), (1,2)
For (2) tegnes løsningskurver gennem (1,2), (-3,5), (1,0), (0,0)
For (3) tegnes løsningskurver gennem (-2,0), (-1,2), (-3,-2), (2,2)

4. Denne opgave løses uden brug af computer. Du skal have udleveret fem A4-ark med en forstørrelse af et koordinatsystem som i opgave 3. Tilpas selv aksebetegnelserne.
Tegn hældningsfelter hørende til følgende fem differentialligninger i koordinatsystemets gitterpunkter.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = x \cdot y$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = x \cdot y^2$

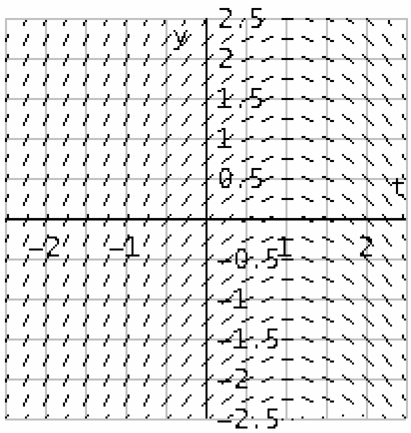
Skitser nogle af løsningskurverne.
Prøv at finde funktionsforskrifterne for nogle af løsningsfunktionerne.

5. Otte differentialligninger og fire hældningsfelter er givet nedenfor. Bestem hvilken ligning der passer med hvert hældningsfelt. Forklar kort hvordan du afgør det. Du bør lave opgaven uden brug af *Derive*.

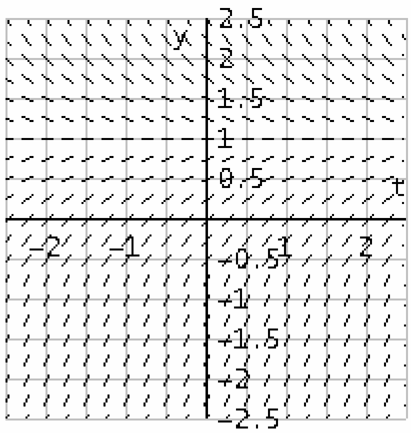
(i) $\dfrac{dy}{dt} = t - 1$ (ii) $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2$ (iii) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - t^2$ (iv) $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t$

(v) $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y$ (vi) $\dfrac{dy}{dt} = t^2 - y^2$ (vii) $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y$ (viii) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 1$

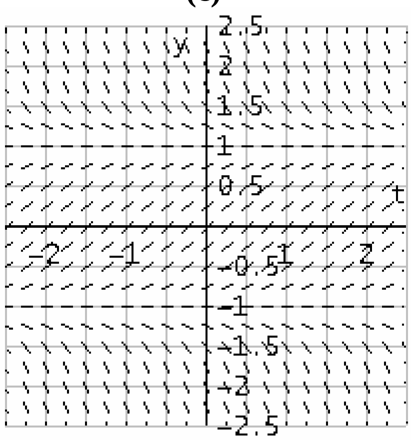
(a)



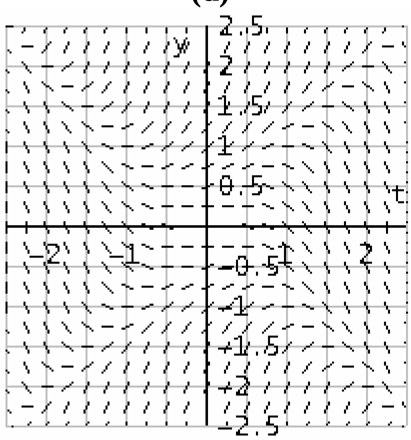
(b)



(c)



(d)



6. Overvej følgende populationsmodel

$$\frac{dP}{dt} = 0.3P(1-\frac{P}{250})$$

hvor *P(t)* er populationen til tiden t.

(a) For hvilke værdier af *P* er populationen i ligevægt?
(b) For hvilke værdier af *P* er populationen voksende?
(c) For hvilke værdier af *P* er populationen aftagende?

7. Overvej følgende populationsmodel

$$\frac{dP}{dt} = 0.2(1-\frac{P}{250})(\frac{P}{50}-1)P$$

hvor *P(t)* er populationen til tiden t.

(a) For hvilke værdier af *P* er populationen i ligevægt?
(b) For hvilke værdier af *P* er populationen voksende?
(c) For hvilke værdier af *P* er populationen aftagende?

8. I tabellen ses udviklingen i antallet af studenter i perioden 1900-1960. Lav en model for væksten i antallet af studenter. Du skal bruge den eksponentielle vækstmodel:

$$\frac{dS}{dt} = kS$$

hvor *S(t)* er antallet af studenter til tiden *t*.

År	Antal studenter[4]
1900	397
1905	388
1910	671
1915	888
1920	1018
1925	1329
1930	1685
1935	1757
1940	2257
1945	2803
1950	2657
1955	3132
1960	4433

(a) Sæt $t = 0$ for år 1900. Indtegn værdierne i et koordinatsystem.
(b) Find en fornuftig værdi for konstanten *k* (udnyt, at *dS/dt* er hældningskoefficient for tangenten).
(c) Benyt RK til at tegne en løsningskurve. Juster lidt på *k*-værdien og begyndelsesværdien, så du eventuelt får en kurve, der passer bedre.
(d) Brug din model til at forudsige antallet af studenter i 1965, 1980 og 2000. Passer dine forudsigelser med de faktiske tal, som er 8958, 15103 og 16956?
(e) Brug modellen til at forudsige antallet af studenter i 2050.
(f) Giv en vurdering af modellens anvendelighed.

9. Forestil dig at en fiskeart i en bestemt sø har en population, som kan modelleres med en logistisk populationsmodel med vækstraten *k,* bærekapaciteten *N,* og tiden t måles i år. Tilpas modellen så den tager hensyn til følgende 4 situationer:
(a) 100 fisk høstes hvert år.

[4] Tabellens værdier er hentet fra Palle Bak Petersen & Søren Vagner: "Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991" (side 304), udgivet af Matematiklærerforeningen 2003

(b) En tredjedel af fiskepopulationen høstes hvert år.
(c) En fjerdedel af fiskepopulationen høstes hvert år.
(d) Antallet af fisk, der høstes hvert år, er proportional med kvadratroden af antallet af fisk i søen.

10. Forestil dig at parameteren for vækstraten $k = 0{,}3$ og at bærekapaciteten $N = 2500$ i den logistiske populationsmodel fra opgave 9. Antag at $P(0) = 2500$

(a) Hvis der høstes 100 fisk hvert år, hvad forudsiger modellen så for langtidsopførslen af fiskepopulationen? Med andre ord, hvad får man ud af at lave en kvalitativ analyse af denne model?
(b) Hvis en tredjedel af fiskene høstes hver år, hvad forudsiger modellen så for langtidsopførslen af fiskepopulationen?
(c) Hvis en fjerdedel af fiskene høstes hver år, hvad forudsiger modellen så for langtidsopførslen af fiskepopulationen?

11. Næsehornet er nu et sjældent dyr. Forestil dig at der afsættes nok land til dyreparker, så der var plads til mange flere næsehornsterritorier end der er næsehorn. Der er altså ingen fare for overbefolkning. Hvis populationen imidlertid er for lille, vil kønsmodne næsehorn have svært ved at finde hinanden, når de skal parre sig. Opstil en differentialligningsmodel for næsehornspopulationen som opfylder disse antagelser. (Der kan opstilles mere end en fornuftig model)

12. Overvej følgende antagelser omkring et brødstykke der dækkes med mug (skimmelsvamp).

- Mugsporer falder på brødet med konstant hastighed.
- Når kun en lille del af brødet er dækket af mug, vil den del af brødet der er dækket af mug vokse med en hastighed, der er proportional med den dækkede del af brødet
- Når en stor del af brødet er dækkes af mug, vil vækstraten aftage.
- For at overleve må mug være i kontakt med brød.

Brug disse antagelser til at opstille en differentialligning som modellerer den del af brødet, som er dækket af mug. (Der kan opstilles mere end en fornuftig model.)

13. Forestil dig at en population kan beskrives ved den logistiske model:

$$\frac{dp}{dt} = 0.4p(1 - \frac{p}{30})$$

(Læg mærke til at vækstrateparameteren er 0.4 og at bærekapaciteten er 30). Til t = 5 bliver populationen ramt af sygdom, som dræber 25% af populationen pr. år. For at tilpasse modellen ændrer vi differentialligningen til:

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} 0.4p(1 - \frac{p}{30}) & \text{for } 0 \leq t < 5 \\ 0.4p(1 - \frac{p}{30}) - 0.25p & \text{for } t > 5 \end{cases}$$

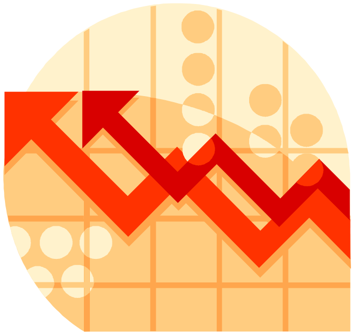
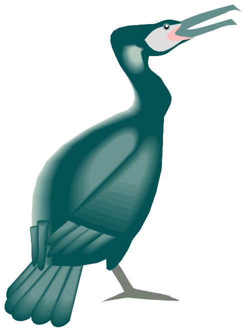
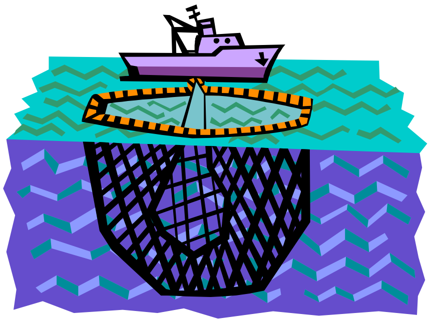
(a) Tegn hældningsfeltet for denne ligning
(b) Skitser et par repræsentative løsninger til denne ligning.
(c) Find den analytiske løsning for denne ligning med initialbetingelserne p(0) = 30 og p(0) = 20.
(d) Beskriv med nogle få sætninger hvordan disse to løsninger opfører sig. (Du kan enten bruge skitserne af hældningsfeltet eller forskriften, men giv en kvalitativ beskrivelse af løsningerne.)

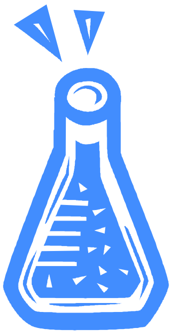
14. En kop varm the er i begyndelsen 98°. Den efterlades i et rum med en temperatur på 21°. Antag at afkølingen til t = 0 er 20° pr. minut.
(a) Antag at Newtons afkølingslov gælder: Afkølingen er proportional med temperaturforskellen mellem chokolade og rum. Opstil en differentialligning for chokoladens temperatur.
(b) Hvor lang tid vil det tage for chokoladen at nå temperaturen 50°?

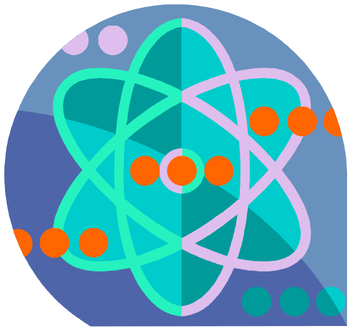
Projekter

Her følger en række projekter som tager tråden op fra de opgaver, du allerede har arbejdet med. Der er dog tale om lidt større, sammenhængende opgaver. Der er præcise opgaver knyttet til hvert projekt.
Nogle af projekterne er "lukkede", hvor du ledes gennem opgaven gennem en masse spørgsmål. Andre er ret åbne projekter, hvor du opfordres til i større udstrækning selv at arbejde med modelopstilling og valg af metoder.[5]







[5] Billederne er multimedieklip © 2003 Microsoft Corporation. Alle rettigheder forbeholdes.

Projekt 1 - Kemiske reaktioner

Dette projekt indeholder opgaver, som leder dig gennem projektet. Du skal ikke selv opstille modellerne. Det er derfor et ret ”lukket” projekt.

Vi vil i dette projekt lave modeller over kemiske reaktioners forløb, så først gør vi os nogle antagelser angående hvor reaktionen forløber. Vi antager den forløber i en lukket beholder, som fx et reagensglas med en fast mængde væske. I sådanne tilfælde er koncentrationen givet ved antallet af molekyler divideret med den faste mængde væske.

Vi kan tillade at et eller flere af produkterne X og Y kan være uopløselige og udfælde af opløsningen. Det er en af hovedårsagerne til at en reaktion med to molekyler kan være irreversibel. For sådan et uopløseligt stof vil ”koncentrationen” også være antal molekyler divideret med mængden af opløsningsvæske, selvom det ikke er opløst. Et produkt kan således udfælde uden at forstyrre reaktionen, men de stoffer, der skal reagere med hinanden, skal dog forblive opløste.

Den teori man har på området siger, at kemiske reaktioners hastighed helt generelt kan skrives som:

Hastigheden hvormed to eller flere kemiske stoffer samtidig kombineres
er proportional med produktet af deres koncentrationer.

Som differentialligning kan det udtrykkes sådan:

$$Hastighed = \frac{dc}{dt} = \mp k[A]^x[B]^y[C]^z \tag{1.1}$$

Ligningen skal forstås på den måde, at den hastighed hvormed stoffet C dannes/fjernes er proportional med koncentrationen af de indgående stoffer i reaktionen ([A], [B], [C]) i en eller anden potens (x, y, z). Eksponentens grad giver navn til hvilken orden reaktionen har.

Hvis vi fx tager en simpel enzymreaktion, hvor det er enzymets evne til at omdanne A til B, der bestemmer hastigheden: $A + E \rightarrow B + E$, så kan den være en **nulte** ordens reaktion. Det betyder, at den kan modelleres med differentialligningen

$$\frac{da}{dt} = -k \tag{1.2}$$

Ligningen skal forstås på denne måde: Vi vælger at se på at stoffet A forsvinder. Derfor giver vi vores hastighedskonstant k et negativt fortegn.
Man ser at A forsvinder med konstant hastighed idet koncentrationen af A og E indgår som nulte potens og derfor blot bliver 1 i ligningen.

Den hastighed hvormed B dannes er den samme som den hastighed hvormed A fjernes. Man kunne lige så godt have lavet en differentialligning for B's dannelse.

Vi tager et skridt videre til en **første** ordens reaktion, som fx kunne være $A \to B + C$. Vi følger igen hvordan stof A forsvinder – derfor negativ hastighedskonstant, k. Hastigheden er her proportional med $[A]^1$, eller skrevet som differentialligning, hvor vi af bekvemmelighedshensyn erstatter [A] med a:

$$\frac{da}{dt} = -ka \qquad (1.3)$$

Vi kan fortsætte videre til en **anden** ordens reaktion, som fx kunne være $A + B \to X$. Vi vil følge hvordan stof A forsvinder og det sker proportionalt med [A] og [B]. Så differentialligningen får formen:

$$\frac{da}{dt} = -kab \qquad (1.4)$$

Hvis [A] = [B] (altså at man starter med lige store koncentrationer af A og B) kan man i stedet bruge den enklere differentialligning:

$$\frac{da}{dt} = -ka^2 \qquad (1.5)$$

Opgave 1
Løs de tre differentialligninger (1.2, 1.3 og 1.5) analytisk med startbetingelsen *a(0) = a0*.

a. Kommenter de tre løsninger.
b. Vi ser nu på løsningsfunktionen til anden ordens reaktionen. Vis, at man får et lineært udtryk på højresiden, hvis man isolerer 1/a på venstre side i løsningsfunktionen.
c. Argumenter for at man, hvis man afbilder $\frac{1}{[A]}$ mod t, får en ret linje. Hvad er hældningskoefficienten for linjen?

Opgave 2
Vi har en reaktion mellem to stoffer A og B: $A + B \to C$
Vi starter et forsøg til tiden 0 med lige store koncentrationer af A og B, 4 mol, og måler mængden af tilbageværende stof A til forskellige tidspunkter.
Målingerne fremgår af følgende tabel:

t	0	1	3	5	8
a	4	2.08	1.06	0.71	0.48

a. Vis at det er en anden ordens reaktion (brug opgave 1)
b. Find hastighedskonstanten k for reaktionen (brug opgave 1)
c. Tegn løsningskurven for differentialligningen og tabelværdierne i samme koordinatsystem.

Irreversible anden ordens reaktioner.

Vi ser på den irreversible reaktion $A+B \to X+Y$.
Et molekyle A og et molekyle B dannet et molekyle af hvert af stofferne X og Y. Man ser at den hastighed, hvormed A og B forsvinder, er den samme som den hastighed, hvormed X og Y dannes.

Vi har lige set på anden ordens reaktioner i de simple tilfælde hvor begyndelseskoncentrationerne for reaktanterne er ens. Men hvad med alle de andre tilfælde, hvor [A] og [B] ikke er ens og hvor der måske allerede er dannet noget stof X og Y.
Denne gang vil vi lade vores model følge dannelsen af X. Den tidligere opstillede differentialligning ændres derfor til:

$$\frac{dx}{dt} = kab \qquad (1.6)$$

På højre side vil vi nu gerne have et udtryk, som kun afhænger af vores øjeblikkelige [X] og nogle startværdier for [A] og [B]. Så vores opgave er at udtrykke a og b som funktioner af x.
Den øjeblikkelige koncentration af a er: startkoncentrationen af a (a_0) minus der nydannede x.
Det nydannede x er den nuværende koncentration af x minus startkoncentrationen af x (x_0).
Man kan gøre tilsvarende bemærkninger om [B], så alt i alt fås at (1.6) kan omskrives til differentialligningen:

$$\frac{dx}{dt} = k(a_0 - (x - x_0))(b_0 - (x - x_0)) \qquad (1.7)$$

$$\frac{dx}{dt} = k(a_0 + x_0 - x)(b_0 + x_0 - x) \qquad (1.8)$$

Eksempel

2 mol sølvnitrat $AgNO_3$ blandes med 3 mol saltsyre HCl. Der udfældes hvidt sølvklorid og reaktionen forløber til ende. I dette tilfælde er der ½ mol sølvklorid ved reaktionens begyndelse. Hastighedskonstanten k er 1.

$$AgNO_3 + HCl \;\to\; AgCl + HNO_3$$

Vi kan fastlægge følgende værdier ud fra opgaveteksten:
$k = 1$
$a_0 = 2$
$b_0 = 3$
$x_0 = ½$
Differentialligningen bliver nu:

$$\frac{dx}{dt} = 1(2 + \frac{1}{2} - x)(3 + \frac{1}{2} - x) \qquad (1.9)$$

Opgave 3
Find ligevægtspunkterne, hvor hastigheden er 0, for differentialligningen i (1.8), og forklar hvad det betyder i praksis.

Opgave 4
Løs differentialligningen som er givet i (1.9) og tegn løsningskurven. Hvad viser løsningskurven om reaktionens forløb?

(**Teknisk tip**: *Derive* kan ikke tegne denne funktion direkte fordi x er en funktion af t. *Derive* kan kun forstå y som funktion af x. Hvis denne funktion skal tegnes skal du markere alene højre side og så tegne.)

Reversible anden ordens reaktioner.

Vi ser på den reversible reaktion $A + B \rightleftharpoons X + Y$ hvor den tilbagegående reaktion også er en reaktion for to molekyler.
Ligevægtstilstanden i en reversibel proces nås når hastigheden for dannelsen og hastigheden for nedbrydning er lige store. Derfor bestemmes ligevægtstilstande såvel som reaktionshastigheder som en kombination af fremadgående og tilbagegående hastighedskonstanter.
Denne gang er der en tilbagegående hastighedskonstant, k_{-1}, såvel som en fremadgående, k_1. Fra massevirkningsloven anvendt på den tilbagegående reaktion får vi

hastigheden hvormed X+Y ændres = $k_{-1}[X][Y]$

Under normale omstændigheder er den fremadgående og den tilbagegående reaktion uafhængige af hinanden og som konsekvens heraf er hastigheden hvormed fx X ændres bare summen af effekterne af de to reaktioner hver for sig. Heraf følger at nettohastigheden hvormed [X] forandrer sig er givet ved:

$$\frac{dx}{dt} = (\textit{omdannelseshastigheden for } A + B) - (\textit{omdannelseshastigheden for } X + Y)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1[A][B] - k_{-1}[X][Y] \\ \frac{dx}{dt} &= k_1(a_0 + x_0 - x)(b_0 + x_0 - x) - k_{-1}x(y_0 - x_0 + x) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Vi har brugt samme ide som i (1.7) til at omskrive de enkelte koncentrationer, så de alle udtrykkes ved den øjeblikkelige X-koncentration og begyndelseskoncentrationerne for A, B og Y.
Under visse omstændigheder er de to reaktioner ikke uafhængige, fx hvis der udfældes et stof, som vi så på ovenfor. Det kan også være hvis en af reaktionerne er meget exoterm (udvikler varme). I det tilfælde ændres reaktionsbetingelserne radikalt med temperaturen.

Opgave 5
Vi har en reversibel proces og startkoncentrationen af A og B er henholdsvis 0.5 og 0.75 Startkoncentrationen af X og Y er 0.1. Antag at $k_1 = 8$ og $k_{-1} = 3$.

a. Indsæt værdierne i dette eksperiment i differentialligningen (1.10)
b. Vis at ligevægtspunkterne fås som løsningen til en andengradsligning.
c. Find ligevægtspunkterne (ligevægtskoncentrationerne), hvor reaktionen går i stå.
d. Tegn hældningsfelter og løsningskurven for denne reaktion i samme koordinatsystem.
e. Kommenter din tegning.

Opgave 6
Vi har en reaktion $A + B \rightarrow C$. Der er tale om en anden ordens reaktion.
Startkoncentrationen af A, B og C er henholdsvis *1/2, 1/3* og *0*. Hastighedskonstanten er *k*.

a. Vi lader c betegne *[C]*. Vis at det fører til differentialligningen:

$$\frac{dc}{dt} = k(\frac{1}{2} - c)(\frac{1}{3} - c)$$

b. Løs ligningen for c(0) = 0

c. Vis at den tilsvarende ligning for a er:

$$\frac{da}{dt} = -ka(a - \frac{1}{6})$$

d. Løs denne ligning for a(0) = ½.

e. Vis ved at addere løsningerne for c og a, at summen er konstant.

f. Til hvilket tidspunkt er 90% af ligevægtskoncentrationen af C nået?

g. Antag at k øges med 10%. Udregn igen punkt f.

Opgave 7

Vi har den reversible anden ordens reaktionen $A + B \rightleftharpoons C + D$. Startkoncentrationen af A og B er henholdsvis *0.4* og *0.5.* Startkoncentrationen af C og D er 0. Antag at $k_1 = 10$ og $k_{-1} = 2.5$.

a. Vi lader c betegne *[C].* Vis at det fører til differentialligningen

$$\frac{dc}{dt} = 10(0.4 - c)(0.5 - c) - \frac{5c^2}{2}$$

b. Vi sætter *c(0)* = 0. Hvad er ligevægtskoncentrationen af [C]?

c. Tegn to grafer, en hvor $k_{-1} = 2.5$ og en hvor $k_{-1} = 1.25$ og skriv en kommentar.

Litteratur til videre læsning:

a. Peter Tebbutt: **Basic Matematics for Chemists**, Wiley

b. E. K. Yeagers m.fl: **An Introduction to the Mathematics of Biology**, Birkhäuser 1996

c. Morten Blomhøj m.fl: **Modelsnak**, Fag 1985, side 147-150

Projekt 2 – Matematiske fiskerimodeller

Dette projekt[6] indeholder mange opgaver, som leder dig gennem projektet. Du skal ikke selv opstille modellerne. Det er derfor et ret "lukket" projekt.

De første matematiske fiskerimodeller blev skabt i Storbritannien i 50'erne. Målet med modellerne var at regne sig frem til, hvordan man på længere sigt får den størst mulige fangst.
Man så på hver fiskeart for sig (kaldes én-arts-model) og var således ikke opmærksom på, at der kunne være et samspil mellem de forskellige fiskebestande. Man gik ud fra, at en regulering af fiskeriet på en bestand ikke havde afsmittende virkning på andre bestande.
I starten af 70'erne begyndte danske fiskeribiologer med kendskab til matematik at sætte spørgsmålstegn ved denne antagelse. Ved brug af matematiske modeller skabte de en model af Nordsøen, den såkaldte *Nordsømodel.*

Vi skal i det følgende se på den matematisk lidt simplere en-arts-model.

Vægten af en fisk

Vi sætter $w(t)$ = vægten af en enkelt fisk til tidspunktet t og husker, at $w'(t)$ angiver den hastighed hvormed vægtændringen foregår til tidspunktet t.
Bertalanffy opstillede følgende model for vægtændringen:

$$w'(t) = \mathrm{h} \cdot (w(t))^{\frac{2}{3}} - \mathrm{k} \cdot w(t) \qquad (2.1)$$

hvor h og k er positive tal.

Størrelsen $h \cdot w(t)^{\frac{2}{3}}$ kaldes *opbygningsleddet*, der antages at repræsentere al den føde, som fisken optager pr tidsenhed. Eksponenten er ikke nødvendigvis 2/3 for alle fisk.
Tilsvarende kaldes $k \cdot w(t)$ for *nedbrydningsleddet*, som antages at udtrykke den del af den optagne føde, der går til at holde gang i fordøjelsen, respirationen m.v. pr tidsenhed. Eksponenten er ikke nødvendigvis 1 for alle fisk.

Opgave 1
Løs differentialligningen når vi antager at $w(0) = 0$ (fisken vejer ikke meget til at starte med) og vis at *Derives* løsning kan omskrives til:

$$w(t) = \left(\tfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot kt}\right)^3$$

Opgave 2
a. Gør rede for at grafen for w har en vandret asymptote når $t \to \infty$
b. Hvad er ligningen for denne vandrette asymptote?

---

[6] Dette projekt er i sin oprindelige udgave forfattet af Bjørn Grøn og lagt på matematiklærernes hjemmeside. Denne udgave er dog ændret på mange måder i forhold til det oprindelige materiale.

c. Tegn grafen for w når $(\frac{h}{k})^3 = 5$ i hvert af tilfældene: k = 0.4, k = 0.8 og k = 1.2
d. Kommenter graferne.

Vi vælger herefter at bruge dette udtryk for vægten af en fisk som funktion af tiden:

$$w(t) = w_\infty (1 - e^{-\frac{k}{3}t})^3 \qquad (2.2)$$

En fiskebestands biomasse

For at få et indtryk af udbyttet ved fiskeri ser vi nu på en enkelt årgang fisk. Antallet af fisk til tidspunktet t kalder vi $N(t)$. Når årgangen er født er der et bestemt antal individer i årgangen, og der kommer ikke flere til, idet vi ser bort fra indvandring. Vi antager foreløbig at fiskebestanden ikke er udsat for fiskeri.

Opgave 3

a. Argumenter for at $\mathrm{N}(t)$ må opfylde:
$$\mathrm{N}'(t) = -\mathrm{a} \cdot \mathrm{N}(t),$$
hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr tidsenhed fx ved en naturlig død eller ved at blive spist af andre fisk.
b. Bestem herefter $\mathrm{N}(t)$ ved at løse differentialligningen hvor $N(0) = N_0$

Opgave 4

$\mathrm{B}(t)$ = den samlede fiskemængde til tidspunktet t
a. Argumenter for at $\mathrm{B}(t) = \mathrm{N}(t) \cdot w(t)$
b. Opskriv det samlede udtryk for $\mathrm{B_u}(t)$ – den samlede vægt af en årgang fisk uden fiskeri.
c. Gør rede for at $\mathrm{B_u}(t)$ er størst når $t = -\frac{3}{k} \cdot \ln(\frac{a}{a+k})$
d. Giv en sproglig fremstilling af, hvad du har fundet ud af.

Fangstligningen

Nu skal vi til at eksperimentere med fiskeri. Hvor stort et udbytte kan vi få? Hvornår er det bedst at begynde at fange fiskene?

I opgave 3 så vi at $\mathrm{N}(t)$ må opfylde:

$$\mathrm{N}'(t) = -\mathrm{a} \cdot \mathrm{N}(t),$$

hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr tidsenhed.

Tallet a består af et bidrag fra naturlig død M, og et bidrag fra fiskeriet f, så ligningen kan forfines til:

$$\mathrm{N}'(\mathrm{t}) = -(\mathrm{M} + \mathrm{f}) \cdot \mathrm{N}(\mathrm{t})$$

hvor M er den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed dør naturligt, og f er fiskeriintensiteten, dvs. den brøkdel af fiskene, der fanges pr tidsenhed (f er fx 0,2 eller 20%).

Ved at løse ligningen får vi:

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{k} \cdot e^{-(\mathrm{M}+\mathrm{f})t}$$

Denne ligning gælder fra og med vi begynder at fiske. Lad os antage, at vi først begynder at fiske efter t_c år, dvs. efter at årgangen har nået en vis størrelse.

Før vi begynder at fiske udvikler antallet af fisk sig efter følgende udtryk:
$N(t) = N_0 \cdot e^{-Mt}$, hvor N_0 angiver antallet af nyklækkede fisk (fx 2 millioner).

Opgave 5
Vis at $k = N_0 \cdot e^{f\,t_c}$

Ud fra opgave 5 finder vi ved indsættelse:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t}$$

der er gyldig for $t > t_c$, hvor t_c er det tidspunkt, vi begynder at fange af årgangen (fx når fiskene er 2 år gamle)
N_0 er antallet af nyklækkede fisk, som "starter" årgangen (N_0 er fx 2 million);
t regnes ud fra "fødslen" af denne årgang.
M er den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed dør naturligt,
f er fiskeriintensiteten, dvs. den brøkdel af fiskene, der pr tidsenhed fanges.

Vi fandt tidligere, at vægten af den enkelte fisk kunne beskrives ved:

$$w(t) = w_\infty (1 - e^{-\frac{k}{3}t})^3$$

samt at tallet w_∞ er den maksimale vægt for pågældende fiskeart (den asymptotiske grænse for *w(t)*).
k er en proportionalitetskonstant fra "nedbrydningsleddet" ved differentialligningen for *w(t)*.

Sættes de to udtryk ind får vi følgende:

$$B_f(t) = w_\infty \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{3} \cdot t})^3 \qquad (2.3)$$

som angiver den samlede vægt af en årgang fisk der er udsat for fiskeri startende når fiskene er t_c år gamle

Opgave 6

a. Definer i *Derive* de to funktioner, der angiver biomassen B(t) uden fiskeri (se opgave 4) og med fiskeri (2.3). Vær opmærksom på, at funktionen med fiskeri følger den uden fiskeri indtil fiskealderen, f_c. Brug parameterværdierne:
   $t_c = 4$
   $w_q = 24$
   $N_0 = 6$ (6 mio. fisk i begyndelsen)
   $M = 0.1$
   $k = 3 \cdot 0.2656 = 0.7968$
   $f = 0.2$
b. Tegn de to grafer i samme koordinatsystem.

Den samlede biomasse og den samlede fangst.

Nu har vi fulgt en årgang med og uden fiskeri. Vi kan se hvor meget biomasse der er til ethvert tidspunkt gennem årgangens liv med og uden fiskeri. Nu vil vi gerne finde den samlede fangst for det er den vi gerne vil optimere. Hvilken fiskerialder og hvilken fiskeriindsats giver det største udbytte af årgangen?

Den samlede biomasse af denne årgang er således **summen af fangsten i alle aldre.**
Fangsten sker med en intensitet på *f*.

Opgave 7
Argumenter for, at den samlede fangst Y er

$$Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} B(t)\, dt$$

eller

$$Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} w_q \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{3} \cdot t})^3\, dt$$

Opgave 8
Definer i *Derive* denne udbyttefunktion som funktion af **to variable**:

$$Y(t_c, f) = f \cdot \int_{t_c}^{T} w_q \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{3} \cdot t})^3\, dt$$

og brug følgende parameterværdier:
$w_q = 24$
$N_0 = 6$,
M = 0.1
k = 3 · 0.2656 = 0.7968,
T = 15
f := (nulstilles)
t_c := (nulstilles)

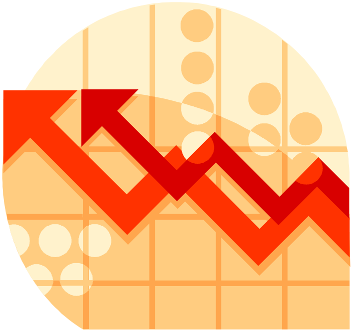
Tegn grafen for Y i tre dimensioner hvor $t_c \in [0;10]$ og $f \in [0;1]$
Vi er interesseret i at finde sammenhængen mellem Y, f og t_c.
f kan reguleres ved kvoter, antal trawlere osv.
t_c kan reguleres ved garnmaskernes størrelse (overvej det!).

a. Hvad er det bedste rekrutteringsår, t_c – den alder hvor vi starter jagten på fisken?
b. Kan du finde et samlet svar: Hvilke værdier af f og t_c vil vi anbefale?
c. Kan du forklare hvorfor vi ikke får det bedste resultat ved blot at fiske los?
d. Vend tilbage til udledningen af modellen. Gennemgå de forskellige antagelser vi laver undervejs, og giv et skøn på, hvor sikre vi kan være i fastlæggelsen af konstanterne og i vurderingen af hvordan tingene spiller sammen.

Litteratur til videre læsning:

a. Flemming Clausen m.fl.: **Integralregning og differentialligninger**, Munksgaard 1993, side 158-164
b. Bent Zimmermann Nielsen: **Matematiske fiskerimodeller**, Systime 1986

Projekt 3 – Eksplosiv befolkningsvækst



Dette projekt stammer oprindelig fra **BASE Note 2**[7]og indeholder opgaver, som leder dig gennem projektet. Du skal selv opstille modellen for eksplosiv vækst.

Hvordan udvikler verdens befolkning sig?
Overbefolkning har længe været betragtet som et af de alvorligste problemer for menneskeheden. Siden udgivelse af bogen "Grænser for vækst" (D. H. Meadows & Behrens; 1976) har der i forskellige sammenhænge været arbejdet med at modellere befolkningsvæksten på verdensplan og de ressource- og miljømæssige konsekvenser heraf. Denne problemstilling handler om at opstille en simpel matematisk model, der kan beskrive udviklingen i verdens befolkning i løbet af de sidste 350 år.

t (år)	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1920	1940	1960
N(t)	545	623	728	906	1171	1608	1834	2295	3003

Tabel 3.1 Estimater over verdens befolkning N(t) for udvalgte år t. N(t) er angivet i millioner mennesker

a. Undersøg ud fra disse data om verdens befolkningstal kan beskrives som en eksponentiel vækst i perioden.

I stedet for eksponentiel vækst kunne man forestille sig, at væksthastigheden var proportional med befolkningstallet i anden potens. En sådan vækst kaldes for eksplosiv vækst.

b. Undersøg ud fra data i tabel 4.1 om verdens befolkningen med rimelighed kan beskrives ved hjælp af en model for eksplosiv vækst i den periode data dækker.

c. Opstil og løs differentialligningen for eksplosiv vækst, og bestem den løsning, der passer bedst på data i tabel 3.1.

d. Hvor mange mennesker var der i følge denne model i år 0?

e. Hvornår levede Adam og Eva ifølge denne model?

f. Hvad forudsiger modellen om verdens befolkning?

[7] Morten Blomhøj, Tine Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen: **BASE Note 2**, Nat Bas RUC 2000

g. Diskuter inden for hvilken tidsperiode den eksplosive vækstmodel giver en rimelig beskrivelse af udviklingen i verdensbefolkningstallet.

h. Fremskaf nogle nyere tal for verdensbefolkningen og diskutere modellens forudsigelser i forhold til disse data.

Projekt 4 – Skarvbestanden i Danmark

Dette projekt stammer oprindelig fra **BASE Note 2**[8] og indeholder opgaver, som leder dig gennem projektet. Du skal selv opstille en model til sidst, hvor projektet bliver ret krævende.

Hvordan udvikler skarvbestanden sig?

Skarven er en stor sort fugl (ca. 90 cm høj), der lever af små fisk og fiskeyngel, som den fanger ved at dykke på relativt lavt vand (0-8 meters dybde). Den lever i kolonier, hvor den bygger reder i høje træer. Skarven blev fredet i Danmark i 1980, og siden er populationen af ynglefugle vokset stødt.

Det er imidlertid langt fra alle, der er begejstret for skarven. Specielt er fiskerne i fjordene og de kystnære områder utilfredse med, at skarven spiser en del af de fisk, som udgør deres fangstgrundlag, og mange skovejere er trætte af, at skarvkolonierne skider deres træer ihjel. Endelig mener nogle jægere og naturfolk, at skarven skræmmer andre fugle væk, og derfor bidrager til mindre diversitet i den danske natur. Der har som følger af disse forskellige synspunkter og interesser været en til tider heftig offentlig debat om skarvpopulationens udvikling og en mulig ophævelse af dens fredning. Denne problemstilling handler om at opstille og analysere nogle forskellige modeller for skarvpopulationens udvikling i Danmark, og herudfra vurdere, hvordan populationen vil udvikle sig.

Tabel 4.1 viser udviklingen i antallet af reder fra skarvens fredning i 1980 og frem til 1992.

.

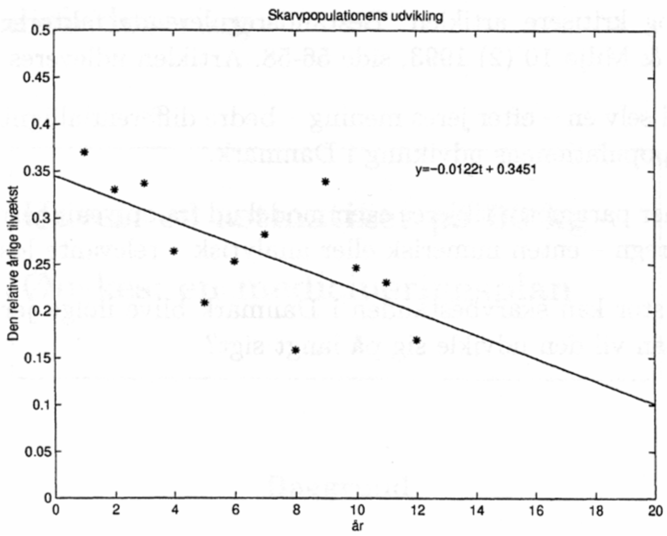
År	0	1	2	3	4	5	6
Reder	2037	2791	3713	4964	6275	7585	9505

År	7	8	9	10	11	12
Reder	12188	14116	18901	23558	28994	33900

Tabel 4.1 Skarvbestandens udvikling i Danmark fra 1980 (sat til år 0) og frem til 1992. Kilde: (Skov & Naturstyrelsen; 1992)

Udfra disse data har (Dieperink; 1993) opstillet en model for skarvpopulationens udvikling i Danmark. Modellen bygger på en antagelse, om at den relative tilvækst aftager lineært med tiden. Figur 4.1 viser den relative årlige tilvækst for skarvpopulationen som funktion af tiden siden fredningen i 1980. Den bedste rette linje gennem disse datapunkter er bestemt ved lineær regression.

[8] Morten Blomhøj, Tine Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen: **BASE Note 2**, Nat Bas RUC 2000



Figur 4.1 Viser den relative tilvækst i skarvpopulationen fra 1980 (sat til år 0) frem til 1992

På dette grundlag kan man opstille følgende differentialligningsmodel for udviklingen i den danske skarvpopulation:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = -a\cdot t + b$$

hvor a og b er parametre for regressionslinjen.

a. Vis, hvordan man kan nå frem til grafen i figur 4.1 ud fra tabel 4.1.

b. Forklar differentialligningen udfra figur 4.1. Estimer værdier for parametrene a og b. Hvilke enheder har de to parametre, og hvordan kan de fortolkes?

c. Find den analytiske løsning, $f(t)$, der opfylder begyndelsesbetingelsen $f(12) = 33900$, altså svarende til det observerede antal reder i 1992.

d. I hvilket år vil skarvbestanden ifølge modellen være størst, og hvor stor vil den da være, når der i gennemsnit er 4,6 skarvindivider pr. rede?

e. Eksperimenter med modellen - gerne ved hjælp af numeriske metoder. Tegn nogle karakteristiske løsningskurver. Hvad forudsiger modellen om skarvbestandens fremtidige udvikling i Danmark?

f. Kritiser modellen.

g. Læs og kritiser artiklen "Bestandsregulerende faktorer hos skarv", Vand & Miljø 10 (2) 1993, side 56-58.

h. Opstil selv en efter jeres mening bedre differentialligningsmodel for skarvpopulationens udvikling i Danmark.

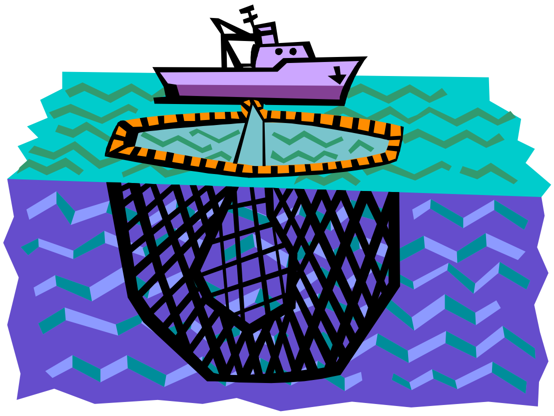
i. Estimer parametre til jeres egen model ud fra oplysningerne i tabel 4.1, og beregn — enten numerisk eller analytisk — relevante løsningskurver.

j. Hvor stor kan skarvbestanden i Danmark blive ifølge jeres model, og hvordan vil den udvikle sig på langt sigt?

Litteratur til videre læsning:

a. Dieperink C. 1993a. **Bestandsregulerende faktorer hos skarv** (Factors limiting the population growth of cormorants). Vand og Miljø 10 (2):56-58.

Projekt 5 - Logistisk model med høst



Dette projekt er en åben type opgave, hvor du selv skal vælge dine metoder. Du skal ikke selv opstille modellerne, men skal prøve at hente så meget information som muligt ud af dem.

Vi skal se på den logistiske model for populationsvækst, men i modellen er der tilføjet led, der skal simulere "høst" eller "fangst". Man kan fx forestille sig en population af fisk som udsættes for fiskeri i forskellige former og med forskellig effektivitet.
Differentialligningerne er givet neden for. Modellerne indeholder parametrene k, n, a_1 og a_2. Hvis hele klassen skal løse opgaven, kan man vælge mellem 10 forskellige sæt parameterværdier fra tabel 1.
I din rapport skal du diskutere betydningen af hver variabel og hver parameter og forklare, hvorfor ligningen skrives på den måde, den gør.

Vi har tidligere diskuteret tre forskellige tilgange, som man kan bruge for at studere differentialligninger: *Numeriske teknikker* giver grafer, som approksimerer løsningen, *geometriske/kvalitative teknikker* giver forudsigelser om langtidsopførsel for løsningen og i særlige tilfælde giver *analytiske teknikker* eksplicitte forskrifter for løsningen. I din rapport skal du anvende så mange af disse teknikker, som det er nødvendigt for at forstå modellerne. Du skal besvare følgende spørgsmål:

1. Logistisk vækst med konstant høst. Ligningen

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - a$$

repræsenterer den logistiske vækst med konstant høst med hastigheden a. Sæt $a = a_1$ og undersøg, hvad der sker med fiskepopulationen ved forskellige initialbetingelser?
Tip: Undersøg ligevægtspunkter (læg mærke til at højresiden er et andengradspolynomium) og undersøg fortegn for $\frac{dp}{dt}$ under de forskellige betingelser.

2. Logistisk vækst med periodisk høst. Ligningen

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - a(1 + \sin bt)$$

er en ligning som modellerer periodevis høst. Hvad repræsenterer parametrene a og b? Lad $b = 1$. Når $a = a1$ skal du undersøge, hvad der sker med populationen ved forskellige initialbetingelser?

3. Se på den samme ligning som under **2.**, men lad $a = a_2$. Hvad sker der med fiskepopulationen ved forskellige initialbetingelser med denne a-værdi?

Din rapport: I din rapport skal du besvare de tre spørgsmål oven for i rækkefølge og i form af et kort essay. Du skal i spørgsmål 1 og 2 begynde med at beskrive betydningen af hver variabel og hver parameter, og du skal forklare, hvorfor differentialligningen ser ud, som den gør. Du skal indsætte passende billeder og grafer for data og løsninger for dine modeller.

Tabel 1
Mulige parametervalg

Valg	k	N	a_1	a_2
1	0.25	4	0.16	0.25
2	0.50	2	0.21	0.25
3	0.20	5	0.21	0.25
4	0.20	5	0.16	0.25
5	0.25	4	0.09	0.25
6	0.20	5	0.09	0.25
7	0.50	2	0.16	0.25
8	0.20	5	0.24	0.25
9	0.25	4	0.21	0.25
10	0.50	2	0.09	0.25

Litteratur til videre læsning:

a. Flemming Clausen m.fl.: **Integralregning og differentialligninger**, Munksgaard 1993, side 160-162

Projekt 6 – Vækst af mug på brød

Dette projekt omfatter et praktisk forsøg med dyrkning af mug på brød. Du skal prøve at teste to modeller for vækst på dine data.

Placer et stykke mugfrit brød i en plastikpose eller en skål med låg og med en smule vand. Sæt det hele et lunt sted. Du skal nu hver dag notere, hvor stor en del af brødet, der er dækket af mug. En metode, du kan bruge, er at overføre et ensartet netværk fra fx millimeterpapir/ternet papir til en transparent. Hold det klare plastik over brødet og tæl det antal felter, som er mere end halvt dækket af mug.

Advarsel: Det tager mindst 2 uger at indsamle en fornuftig mængde data. Nogle brødtyper synes at være næsten umulige at dyrke mug på, så vælg dit brød med omhu. Pas også på at brødet ikke tørrer ud. Hvis muggen gror, vil brødet se ret ulækkert ud efter en uge, og du skal vaske hænder, når du har været i kontakt med brødet.

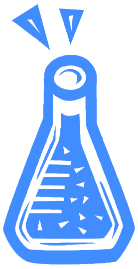
I din rapport skal du besvare følgende spørgsmål:

1. Lav en eksponentiel vækstmodel som bedst muligt modellerer de indsamlede data. Hvor nøjagtigt passer model med data? Husk at gøre rede for hvordan du fandt parameterværdien for vækstraten.
2. Lav en logistisk vækstmodel som bedst muligt modellerer de indsamlede data. Hvor nøjagtigt passer model med data? Husk at gøre rede for hvordan du fandt parameterværdien for vækstraten og værdien for bæreevnen.[9]
3. Diskuter de to modeller for mugvækst. Var der nogle overraskelser? Gør det nogen forskel, at vi måler det område, som muggen dækker i stedet for at måle vægten af muggen? I hvilken grad vil du tro på forudsigelser af den fremtidige mugpopulation ud fra disse to modeller?

Din rapport: Du skal i din rapport gøre rede for hvilken type brød du brugte, hvor det blev opbevaret og hvor ofte du målte mugvæksten? Din analyse af modellerne kan omfatte kvalitative, numeriske og analytiske argumenter og grafer for data og modeller.

[9] Du kan læse om, hvordan man finder parameterværdier i opgave 191 i Jens Carstensen og Jesper Frandsen: **MAT 3A Opgaver** eller eksempel 4.1 i Jonny Schultz: **Matematiks anvendelse i biologi**, Munksgaard 1974.

Projekt 7 – Mikroorganismers vækst



Dette projekt omfatter et praktisk forsøg med dyrkning af gærceller eller bakterier. Det er et meget åbent projekt, hvor du selv skal argumentere for valget af model og selv opstille differentialligninger.

Data i forsøget kan indsamles på forskellige måde. Her er to forslag:

1. 10% sukkervand med lidt gærnæringssalt i en termoflaske podes med lidt gær, så der kommer en alkoholgæring i gang.
   Gærcellernes stofskifte producerer varme, som kan registreres som en temperaturstigning over et par døgn via CBL eller PASCO. Du skal lave en model over **temperatur**forløbet i termoflasken[10].
2. LB medie podes med bakteriestammen E.coli K-12. Turbiditetssensor og termosensor forbindes til CBL eller PASCO. Der måles hvert 15 min i et døgn. Du skal lave en model over **turbiditeten**.
   Turbiditet refererer til den relative klarhed af en opløsning. Jo mere turbid, jo flere opslæmmede partikler er der i opløsningen. Turbiditet måles i NTU (nephelometric turbidity units). Sensoren måler uigennemsigtigheden i væsken ved at måle i hvilken grad lys der passerer gennem opløsningen bliver spredt af opslæmmede partikler[11].

Din rapport: Du skal i din rapport i essayform besvare følgende opgaver:

- Sproglig beskrivelse af det system, der søges modelleret. Systembeskrivelsen kan evt. være ledsaget af et diagram, der fremstiller dynamikken i systemet skematisk. (Det skal endvidere fremgå, hvorledes systemet er afgrænset og hvilke overvejelser der ligger til grund herfor.)

- Beskrivelse af en matematisk model af systemet. Det vil sige opstilling af modellens ligninger, samt ledsagende forklaring af, hvad de indgående parametre og variable står for (og hvilke enheder de måles i.)
  Specielt skal det overvejes hvilke muligheder der er for at estimere parametrenes værdi.

- Kvalitativ analyse af modellen. Find ligevægtspunkter og tegn hældningsfelter og beskriv ved hjælp af disse, de kvalitative træk ved modellen.

- Numerisk analyse af modellen. Den konstruerede model kan anvendes til at simulere bestemte udviklingsforløb ud fra relevante parameterværdier. Resultaterne dokumenteres i form af kommenterede kurver og tabeller.

[10] Læs evt. mere om alkoholgæring i Poul Breum m.fl.: **Alkohol – biologi og samfund**, Nucleus 1984
[11] Se evt. yderligere øvelsesvejledning på adressen http://www.helsinge-gym.dk/ur/oe16.html

Projekt 8 - Kolesterolniveauet i mennesker

Introduktion

Dette projekt[12] indeholder opgaver, som leder dig gennem projektet. Det er derfor et ret ”lukket” projekt.

Høje kolesterolniveauer i blodet har vist sig at være en risikofaktor for hjertesygdomme. Kolesterol produceres i leveren og bruges i opbygningen af cellemembraner og det absorberes også fra føde som indeholder mættede fede syrer. Det gennemsnitlige indhold af kolesterol i blodet er ca. 200 mg/dl. (USA)[13]

I dette projekt vil vi studere en matematisk model for kolesterolniveauet hos et enkelt menneske. Modellen opstiller kolesterolniveauet som en funktion af det naturlige kolesterolniveau, kolesterol-indtaget og omsætningen af kolesterol i kroppen.

Modellen

I bogen **Differential Equations** (Blanchard et. al., 1997) foreslår forfatterne en matematisk model for kolesterolniveauet hos et individ. Den foreslåede model er

$$\frac{dC}{dt} = k_1(L - C) + k_2 E \qquad (8.1)$$

hvor t, C (t), L, E, k1 og k2 står for følgende variable og parametre:

- t er tid som måles i dage.
- C(t) er individets kolesterolnivau til tiden t målt i mg/dl.
- L er individets ”naturlige” kolesterolniveau som vil forekomme hvis personen fik en kost som ikke indeholder fede syrer.
- E er individets kolesterolindtagelse målt i mg/dag.
- k_1 er en parameter som måler hvor hurtigt individets krop reagerer på afvigelser i kolesterol-niveauet fra det naturlige kolesterolniveau.
- k_2 er en parameter som måler hastigheden hvormed individets krop producerer kolesterol fra mad som er indtaget.

Spørgsmål

1. Hvad er enheden for [dC/dt]?

[12] Dette er en bearbejdet udgave af et projekt offentliggjort af S. F. Ellermeyer på adressen http://science.kennesaw.edu

[13] Groliers Multimedia Encyclopedia

2. Hvad er enheden for k_1? (Tip: Referer til modellen (8.1). Enheden på højre side i differentialligningen må være den samme som på venstresiden)
3. Hvad er enheden for k_2?
4. Beskriv med dine egne ord, hvordan modellen (8.1) er opbygget. Hvad udtrykker det første led og det andet led? Se fx på det du har læst om "kompartmentmodeler".

Analyse af modellen

Lad os betragte to fiktive tvillingebrødre - Bent og Børge. Da de er identiske tvillinger har disse brødre begge det samme "naturlige" kolesterolniveau på L = 140 mg/dl og de samme produktions- og absorptionsparametre på $k_1 = 0.1$ og $k_2 = 0.05$. Når vi først møder Bent og Børge er de 22 år gamle og fordi de har levet hjemme sammen og spist den sammen mad med lavt fedtindhold (færdiglavet af deres mor), har de begge den samme daglige kolesterolindtagelse på E = 80 mg/dag. En dag bestemmer Bent sig for at flytte hjemmefra og får sit eget værelse. Han finder en temmelig hyggelig lejlighed til billige penge. Desværre ligger den lige ved siden af en grill, hvor man kan spise sig mæt for 35 kr.

Bent

For en ung mand alene hjemmefra har sunde madvaner ofte ikke den højeste prioritet. Sådan er det også for Bent. Når han vender hjem efter en forfærdelig dag på sit morgendeltidsjob og en hård dag på universitetet er han træt og sulten. Det blinkende neonskilt fra grillen vinker. Så da Bent bliver hængende i en rutine med at indtage natmåltider på grillen bliver hans daglig kolesterolindtagelse på E = 250 mg/dag. Ifølge modellen (8.1) kan hans indtagelse modelleres af denne ligning:

$$\frac{dC}{dt} = 0.1(140 - C) + 0.05 \cdot 250$$

som kan forenkles til:

$$\frac{dC}{dt} = -0.1C + 26.5$$

En anden bekvem måde at skrive differentialligningen på er:

$$\frac{dC}{dt} = 0.1(265 - C) \qquad (8.2)$$

Hvis vi sætter $t_0 = 0$ til at være det tidspunkt hvor Bent først starter sin spisning på grillen og hvis vi antager at Bents kolesterolniveau på dette tidspunkt var $C_0 = 180$ mg/dl, så kan Bents kolesterolniveau modelleres af begyndelsesværdiproblemet:

$$\begin{aligned} &\frac{dC}{dt} = 0.1(265 - C) \\ &C(0) = 180 \end{aligned} \qquad (8.3)$$

Opgaver

1. Find ligevægtspunktet for differentialligningen (8.2) og giv en vurdering af, hvornår højresiden er positiv eller negativ. Er ligevægtspunktet et dræn (tiltrækkende) eller en kilde (frastødende). Brug oplysningerne til at skitsere flere typiske løsninger for denne differentialligning (håndtegnet).
2. Find den generelle løsning for differentialligningen (8.2). (Vis beregningerne)
3. Find den specielle løsning for begyndelsesværdiproblemet (8.3).
4. Hvis Bent opretholder denne høje kolesteroldiæt i meget lang tid (lad os sige et år eller mere), hvad vil hans (tilnærmede) kolesterolniveau blive? Forklar hvordan du kommer til konklusionen?

Børge
Børge arbejder også deltids og er student på det lokale universitet. Imidlertid vælger han at bo hjemme, hvor han fortsætter med at spise sin mors mad.

Opgaver
Antag at Børges kolesterolniveau er C_0 = 180 mg/dl til $t_0 = 0$:

1. Formuler begyndelsesværdiproblemet, som modellerer Børges kolesterolniveau.
2. Løs begyndelsesværdiproblemet for Børges kolesterolniveau.
3. Synes modellens forudsigelse om Børges kolesterolniveau rimelig? Forklar.

Generel analyse af modellen
En af de tilsigtede anvendelser af kolesterolmodellen (8.1) er at vi håber vi kan bruge modellen til at prøve at forstå hvordan en persons kolesterolniveau fastlægges af de forskellige parametre som er medtaget ved formuleringen af modellen. Givet alle de parametre (som vi har set er bestemt af en bestemt persons fysiologi og spisevaner), vil vi gerne besvare kvantitative spørgsmål såsom

- Hvis denne person fortsætter på sin aktuelle diæt, hvad vil hans kolesterolniveau være en måned fra nu?

og kvalitative spørgsmål som:

- Under de nuværende forhold (parameter værdier), vil denne persons kolesterolniveau stige eller falde?

Endnu et spørgsmål af interesse som er både kvalitativ og kvantitativ i natur er:

- Hvad er langtidsforudsigelsen mht. kolesterolniveau?

Dette sidste spørgsmål er meget vigtigt. En person hvis langtidsforudsigelse af kolesterolniveau er meget høj vil ønske at tage forholdsregler (diæt, træning, osv.) som sænker det forudsagte niveau. Som vi har set i de foregående opgaver er den generelle form af begyndelsesværdiproblemet som modellerer en persons kolesterolniveau dette:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= k_1(M - C) \\ C(t_0) &= C_0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Opgaver

1. Opskriv parameteren M (fra differentialligningen i (8.4)) udtrykt ved hjælp af L, E, k_1, og k_2.

2. På grund af den biologiske betydning af parametrene L, E, k_1, og k_2, antager alle disse parametre positive værdier (med undtagelsen at E kan blive 0). Forklar hvorfor vi af dette kan konkludere at M også er en positiv værdi. Udregn værdien for M for Bent og for Børge.
3. Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet (8.4).
4. For løsningen beregnet ovenfor skal du udregne $\lim_{x\to\infty} C(t)$. Hvad er betydningen af denne grænseværdi udtrykt som kolesterolniveau?
5. Find ligevægtspunktet for differentialligningen $\frac{dC}{dt} = k_1(M - C)$ og giv en vurdering af, hvornår højresiden er positiv eller negativ idet du antager at k_1 og M er positive parametre.

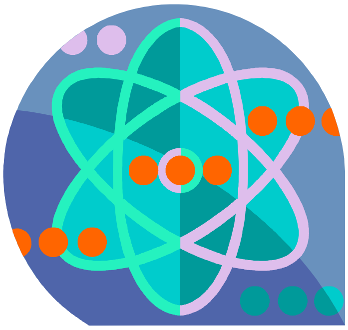
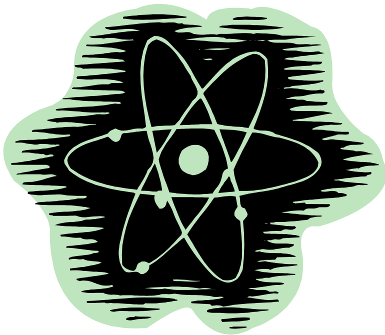
Varierende modelparametre
Kolesterolmodellen (8.1) forudsiger hvordan en persons kolesterolniveau udvikler sig over et tids-

rum som en funktion af parametrene L, E, k_1, og k_2. Indtil videre har vi antaget, at disse parametre alle er konstanter. Imidlertid er disse parametre for de fleste mennesker sandsynligvis ikke virkelige konstanter. De forandrer sig når personen ændrer sine spisevaner, motionsvaner osv. I det følgende vil vi undersøge virkningen af at forandre parameteren E.

Opgaver

1. Vi antager at parametrene L, E, k_1, og k_2 kun kan være positive (med undtagelse af E som kan være 0). Forklar hvorfor det altid gælder at $M \geq L$.
2. Vi vælger nogle faste værdier for k_1, k_2, og L. Du kan selv finde på dem, men de skal selvfølgelig være positive. Behandl E som den eneste parameterværdi og beskriv hvordan hældningsfeltet for og løsningerne til:
$$\frac{dC}{dt} = k_1(M - C)$$
forandres når E langsomt mindskes og går mod nul.
3. Fortolk disse undersøgelser i forhold til langtidsforudsigelser om kolesterolniveauet når der sker forandringer i spisevaner.
4. Når en lille ændring i en parameterværdi fører til drastiske ændringer i løsningstypen for en differentialligning kaldes det en bifurkation. Kommer der på et tidspunkt en kvalitativ ændring i løsningstypen (bifurkation) når E mindskes langsomt mod nul?

Projekt 9 - Radioaktivt henfald

I dette projekt skal I undersøge det dobbelt radioaktive henfald, hvilket vil sige, at de kerner, der dannes ved det radioaktive henfald, selv er radioaktive og derfor også vil henfalde.

Opgave 1.
Først skal I simulere processen ved hjælp af terninger – et passende antal terninger er 150 – 200 (hvis I ikke har så mange terninger, må I kaste flere gange). Terningerne repræsenterer hver en kerne af stoffet ternium. Dette stof er radioaktivt og henfalder – når terningen viser 1 eller 2 – til stoffet kubium. Også dette stof er radioaktivt og henfalder – når terningen viser 6 – til det stabile stof dicium (udtales ”daisium”).
Terningerne kastes. Registrer hvor mange kerner, der ikke er henfaldet (N1 - ternium) og hvor mange, der er henfaldet (N2 -kubium). Dette første kast svarer til tidsrummet fra t = 0 til t = 1. I det næste tidsrum – fra t = 1 til t = 2 (kast nr. 2) – vil nogle af de tilbageværende terniumkerner (som kastes for sig selv) henfalde, og nogle af de i første tidsrum dannede kubiumkerner (som kastes for sig selv) vil henfalde. Registrer nu antallet af terniumkerner (N1), antallet af kubiumkerner (N2) og antallet af diciumkerner (N3). Således fortsættes, hvilket giver et skema som følgende:

Kast nr.	N_1	N_2	N_3
0	200	0	0
1	138	62	0
2	92	98	10
3	60	120	20
…	…	…	…
…	…	…	…

Opgave 2.
Lav en model over radioaktivt henfald. Du skal bruge notationen:

t = tid (uafhængig variabel),
$N(t)$ = mængden af en bestemt radioaktiv isotop til tiden t (afhængig variabel),
λ = henfaldskonstanten (parameter) hvor $\lambda > 0$

Bestem en analytisk løsning når antal radioaktive kerner til t = 0 er N_0 og henfaldskonstanten for ternium kaldes λ).

Opgave 3.
Undersøg om terniumhenfaldet i simuleringen passer med den analytiske løsning. Henfaldskonstanten bestemmes ud fra, at sandsynligheden for at en radioaktiv kerne henfalder i det følgende tidsinterval er $1-e^{-\lambda}$.

Opgave 4.
Opstil en differentialligning, der beskriver ændringen i antallet af kubiumkerner. I ligningen indgår antallet af terniumkerner – denne funktion kender du fra opgave 2. Indsæt funktionen i differentialligningen og bestem en analytisk løsning. (Hvordan er begyndelsesværdierne?). Henfaldskonstanten for kubium kaldes μ.
Hvad sker der, hvis $\lambda = \mu$?

Opgave 5.
Bestem det tidspunkt ts, hvor antallet af kubiumkerner er størst og angiv et udtryk for N2(ts).
Hvad sker der, hvis $\lambda = \mu$?

Opgave 6.
Hvilken værdi har henfaldskonstanten for kubium? (Se opg. 3 (i dette projekt)).
Undersøg sammenhængen mellem model og simulering med hensyn til kubium.

Opgave 7.
Opstil et udtryk for antallet af diciumkerner og sammenlign med simuleringen.

Opgave 8.
Tegn grafer for antallet af de tre typer kerner (analytiske løsninger) i følgende tre tilfælde

1) Ternium henfalder, når terningen viser 1, 2 eller 3, og kubium henfalder, når terningen viser 6 ($\lambda > \mu$)
2) Ternium henfalder, når terningen viser 1 eller 2, og kubium henfalder, når terningen viser 5 eller 6 ($\lambda = \mu$)
3) Ternium henfalder, når terningen viser 1, og kubium henfalder, når terningen viser 4, 5 eller 6 ($\lambda < \mu$).

Kommenter eventuelle ligheder og forskelle.