Komplekse tal

Dette materiale er beregnet til undervisning i matematik i gymnasiet. Der forudsættes kendskab til løsning af andengradsligninger, trigonometri og en lille smule vektorregning. Materialet omhandler komplekse tal, specielt andengradsligningen. Målet er at give eleverne et første indblik i, hvad komplekse tal er, således at de kan nikke genkendende til de komplekse løsninger, som de af og til støder på i arbejdet med matematikprogrammer og avancerede lommeregnere.

Materialet består af en tekst (som evt. kan opgives til mundtlig eksamen), nogle opgaver og et par quizzer. Det er muligt at hente teksten i form af en pdf-fil. Opgaverne åbnes i matematikprogrammet Derive, og det forudsættes derfor, at eleverne arbejder ved en computer, hvor der er installeret Derive. Opgaverne er nummereret fortløbende og er placeret i teksten, så de passer med den teori, der lige er arbejdet med.

Hanne Østergaard, Ishøj Amtsgymnasium

Indholdsfortegnelse

Indledning

Hvis vi skal løse andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, bruger vi løsningsformlen

(1) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi plejer at sætte $d = b^2 - 4ac$ og at kalde d for diskriminanten. Hvis $d > 0$ er der to løsninger, hvis d = 0 er der én løsning, og hvis $d < 0$ er der så ingen løsning.

Hvis vi prøver at løse en andengradsligning med et computerprogram, fx Derive, så vil vi se det pudsige, at der dukker to løsninger frem, selvom $d < 0$. Vi skal se på, hvad det er for en talmængde, der indeholder de løsninger, som vi ellers påstår ikke findes. Denne talmængde kaldes de komplekse tal.

Andengradsligningen

(2) $$x^2 + 1 = 0$$

har ikke nogen løsning, idet der ikke findes et reelt tal, som ganget med sig selv giver -1. Hvis vi alligevel prøver at bruge den sædvanlige løsningsformel, (1), for andengradsligninger, får vi

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{-1}}{2} = \pm\sqrt{-1}$$

Vi vil nu prøve at godtage $\sqrt{-1}$ som en løsning, selvom vi godt ved, at $\sqrt{-1}$ ikke er et reelt tal. Hvis $\sqrt{-1}$ skal være en løsning, må der gælde

(3) $$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

eller m.a.o., at $\sqrt{-1}$ er et tal, som ganget med sig selv giver -1.

I de tilfælde, hvor en andengradsligning ikke har nogen løsning indenfor de reelle tal, kan løsningsformlen altid omskrives, så den står på formen

$$x = a_1 + a_2\sqrt{-1},\ a_1, a_2 \in R$$

og man kan sagtens regne med tal på formen $a_1 + a_2\sqrt{-1}$, når blot man husker at bruge regel (3) samt regnereglerne for de reelle tal.

Eksempel

Vi vil prøve at løse andengradsligningen

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

Løsningsformlen (1) giver

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{(-1)}$$

Vi kalder de to løsninger x_1 og x_2 og finder

$$x_1 + x_2 = (-1 + \sqrt{2}\sqrt{-1}) + (-1 - \sqrt{2}\sqrt{-1}) = -2$$

og

$$x_1 \cdot x_2 = (-1 + \sqrt{2}\sqrt{-1}) \cdot (-1 - \sqrt{2}\sqrt{-1}) \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 - (\sqrt{2})^2(\sqrt{-1})^2 + \sqrt{2}\sqrt{-1} - \sqrt{2}\sqrt{-1} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$$

Vi ser, at selvom der ikke er tale om ”rigtige” løsninger, så gælder den sædvanlige regel, at summen af rødderne er lig med minus koefficienten til x, og produktet af rødderne er lig med konstantleddet.

Prøv selv at regne med tal på formen $a_1 + a_2\sqrt{-1}$ i Derive.

Opgave 1

Definition af komplekse tal

Vi vil nu definere, hvad der skal forstås ved et komplekst tal.

Definition 1

Tallet i er givet ved

$$i = \sqrt{-1}$$

Ifølge det foregående afsnit betyder det, at $i^2 = -1$.

Definition 2

De komplekse tal består af mængden af alle tal, der kan skrives på formen

$$a = a_1 + ia_2, \; a_1, a_2 \in R$$

De komplekse tal betegnes C og i kaldes den imaginære enhed. Nogle gange bruges betegnelsen imaginære tal for de komplekse tal.

De reelle tal a_1 og a_2 kaldes hhv. realdelen og imaginærdelen af det komplekse tal og betegnes hhv. Re(a) og Im(a). Hvis $a_1 = 0$ kaldes $a = ia_2$ et rent imaginært tal. Hvis $a_2 = 0$ er $a = a_1$ et reelt tal. Derfor er de reelle tal en delmængde af de komplekse tal.

Hvis $a = a_1 + ia_2$ kaldes $\overline{a} = a_1 - ia_2$ det konjugerede tal til a.

Eksempel

$a = 2 + 3i$ er et komplekst tal med realdel 2 og imaginærdel 3.

$\overline{a} = 2 - 3i$ er det konjugerede tal til a.

$b = 5$ er et reelt tal.

$c = 7i$ er et rent imaginært tal.

Opgave 2

Regning med komplekse tal

Addition, subtraktion, multiplikation og division foregår på samme måde som for reelle tal. Man skal blot huske på, at $i^2 = -1$. Man kan altid reducere sit regneudtryk, så resultatet ender med at stå på formen $c = c_1 + c_2,\ c_1, c_2 \in R$.

Eksempel

Lad $a = 2 + 3i$ og $b = -1 + 5i$. Så er

$$a + b = (2 + 3i) + (-1 + 5i) \quad \Leftrightarrow$$

$$a + b = 2 + 3i - 1 + 5i \quad \Leftrightarrow$$

$$a + b = 1 + 8i$$

og

$$a - b = (2 + 3i) - (-1 + 5i) \quad \Leftrightarrow$$

$$a - b = 2 + 3i + 1 - 5i \quad \Leftrightarrow$$

$$a - b = 3 - 2i$$

og

$$a \cdot b = (2 + 3i) \cdot (-1 + 5i) \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot b = -2 + 15i^2 + 10i - 3i \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot b = -2 - 15 + 7i \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot b = -17 + 7i$$

Ved division vil $\frac{a}{b}$ være en brøk med et komplekst tal i nævneren. Her skal man få den gode idé at forlænge brøken med $\overline{b}$. På den måde bliver nævneren et reelt tal, så resultatet igen kan skrives på formen $c = c_1 + c_2,\ c_1, c_2 \in R$.

Eksempel

Lad $a = 2 + 3i$ og $b = -1 + 5i$. Så er $\overline{b} = -1 - 5i$ og vi får

$$\frac{a}{b} = \frac{2 + 3i}{-1 + 5i} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(2 + 3i)(-1 - 5i)}{(-1 + 5i)(-1 - 5i)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2 - 15i^2 - 10i - 3i}{1 - 25i^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b}=\frac{-2+15-13i}{1+25} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13-13i}{26} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Man kan selvfølgelig også udlede formlerne for addition osv. generelt. For addition ser formlen sådan ud, når $a=a_1+a_2$ og $b=b_1+b_2$:

$$a+b=(a_1+ia_2)+(b_1+ib_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$a+b=a_1+ia_2+b_1+ib_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$a+b=(a_1+b_1)+i(a_2+b_2)$$

For multiplikation kommer formlen til at se sådan ud:

$$a\cdot b=(a_1b_1-a_2b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

Øvelse

Udled formlen for multiplikation af to komplekse tal.

Opgave 3

Quiz 1

Eksistens af komplekse tal

Man kan indføre de reelle tal ved først at indføre de hele tal ud fra de naturlige tal, dernæst de rationale tal ud fra de hele tal og endelig de reelle tal ud fra de rationale tal. Ligeledes kan man indføre de komplekse tal ud fra de reelle tal.

W. R. Hamilton indførte i 1837 de komplekse tal på aritmetisk grundlag ved at indføre addition og multiplikation i mængden af reelle talpar (a_1, a_2) på følgende måde:

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)$$

Man kan nu vise, at mængden af reelle talpar med de to kompositioner defineret ovenfor udgør et tallegeme.

Ved dernæst at indføre betegnelsen "i" for talparret (0,1) og betegnelsen 1 for talparret (1,0), kan man ved at benytte ovenstående indse, at i^2 = -1, og herefter kan man gå over til den skrivemåde, der er indført i de forrige afsnit.

I matematikundervisningen i gymnasiet er der ikke tradition for at indføre de reelle tal på en stringent måde. Vi tager det i stedet for givet, at de reelle tal med kompositionerne addition og multiplikation udgør et tallegeme, $(R,+,\cdot)$. På samme måde vil vi i disse noter tage det for givet, at de komplekse tal med kompositionerne addition og multiplikation udgør et tallegeme, $(C,+,\cdot)$.

Eksistensen af komplekse tal er beskrevet mange steder i litteraturen. Her henvises den interesserede læser til to bøger, som er skrevet til gymnasieniveau:

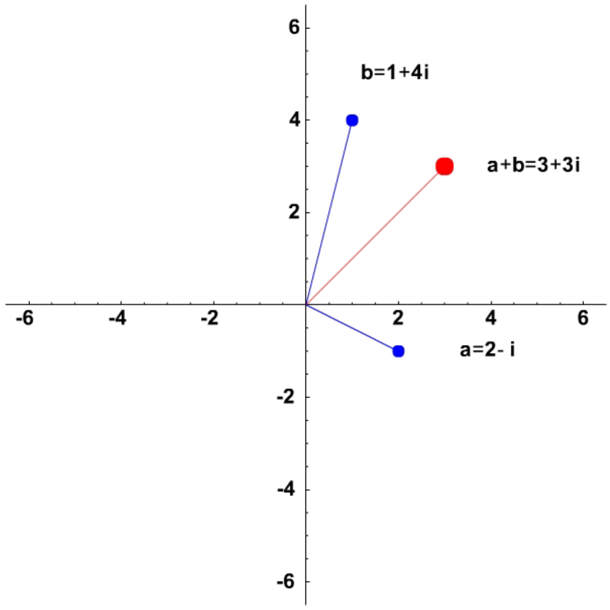
Jesper Frandsen: Komplekse tal og fraktaler, Systime, 1992.

Jens Carstensen: Komplekse tal, Systime, 1987.

Den komplekse talplan

Man kan afbilde et komplekst tal $a = a_1 + ia_2$ i punktet (a_1, a_2) i en plan med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Alle tal på formen $a = a_1 + i0$, dvs. alle reelle tal, afbildes på 1.aksen. Denne akse kaldes derfor den <u>reelle akse</u>. Alle tal på formen $a = 0 + ia_2$, dvs. alle rent imaginære tal, afbildes på 2.aksen. Den kaldes derfor den <u>imaginære akse</u>. Specielt ser vi, at 1 afbildes i punktet (1,0) og at i afbildes i punktet (0,1). Det er derfor, vi kalder i den imaginære enhed.

I vektorregning kalder vi vektoren fra begyndelsespunktet (0,0) til a for stedvektoren til a. Da $a + b = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$, afbildes $a + b$ i punktet $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Heraf kan vi se, at addition af to komplekse tal svarer til addition af de tilsvarende stedvektorer.



Addition af komplekse tal

Opgave 4

Quiz 2

Modulus og argument

Ved multiplikation og division af komplekse tal er det bekvemt at skrive de komplekse tal på en anden form.

Lad $a = a_1 + a_2$. Så er længden af a eller modulus af a givet ved

$$|a| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$$

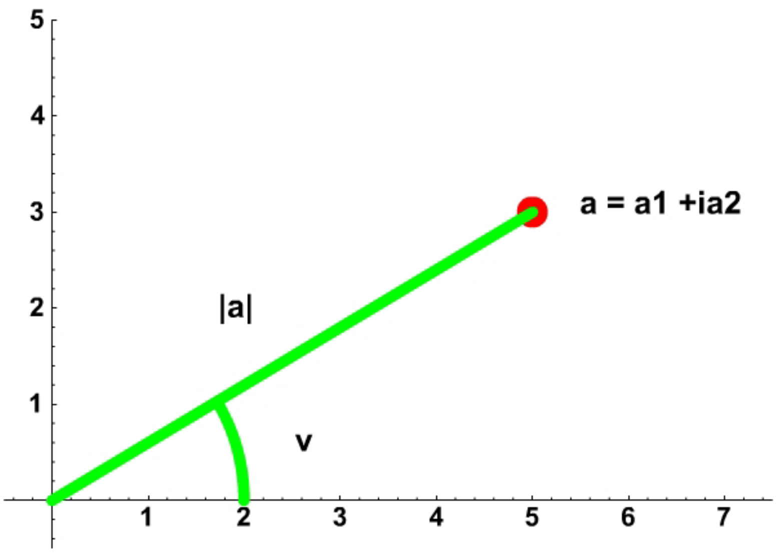
Af udtrykket ovenfor kan vi se, at modulus af a er det samme som længden af stedvektoren til a.

Hvis vi ser på stedvektoren til a, så ved vi fra vektorregningen, at $a_1 = |a|\cos(v)$ og $a_2 = |a|\sin(v)$, hvor v er vinklen mellem den positive del af 1.aksen og stedvektoren til a. Vi kan derfor skrive a på formen

$$a = |a|\cos(v) + i|a|\sin(v) \quad \Leftrightarrow$$

$$a = |a|(\cos(v) + i\sin(v))$$

Vi siger, at a skrives i polære koordinater, som man nogle gange angiver sådan: $(|a|, v)$. I polære koordinater angiver man altså $|a|$ og v i stedet for a_1 og a_2.



Modulus og argument

Vinklen v kaldes et argument af a. Hvis v er et argument af a, er alle vinkler, som er lig med $v + p2\pi, p \in Z$ også et argument af a. Normalt benytter man det argument, der ligger i intervallet $]-\pi; \pi]$. Dette argument kaldes hovedargumentet. Man benytter betegnelsen arg(a) for et argument af a.

Hvis $a = a_1 + a_2$, så kan vi finde hovedargumentet ud fra de to formler $a_1 = |a|\cos(v)$ og $a_2 = |a|\sin(v)$, som omskrives til

$$\cos(v) = \frac{a_1}{|a|} \text{ og } \sin(v) = \frac{a_2}{|a|}$$

Disse to ligninger har hver to løsninger i intervallet $]-\pi; \pi]$. Den rigtige vinkel er den, som er løsning til begge ligninger.

Eksempel

Et komplekst tal er givet ved a = -3 + 4i. Vi vil finde modulus og argument for a:

Vi beregner først $|a|$:

$$|a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Dernæst beregner vi v:

$$\cos(v) = \frac{-3}{5}$$

giver i intervallet $]-\pi; \pi]$ løsningerne v = 2,214 eller v = -2,214.

$$\sin(v) = \frac{4}{5}$$

giver i intervallet $]-\pi; \pi]$ løsningerne v = 0,927 eller v = -2,214.

Heraf ser vi, at vi må vælge v = 2,214, og derefter kan vi omskrive a til

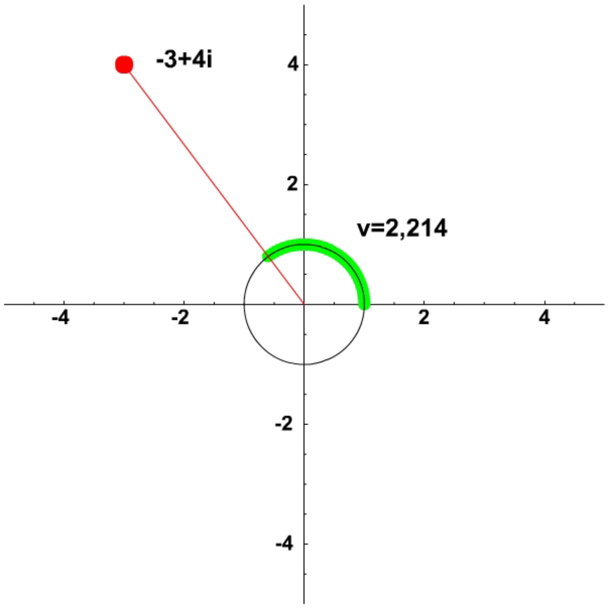
$$a = 5(\cos(2{,}214) + i\sin(2{,}214))$$

eller vi kan sige, at

$$|a| = 5 \text{ og } v = 2{,}214$$

I stedet for at finde de to løsninger til hver af ligningerne $\cos(v) = \frac{a_1}{|a|}$ og $\sin(v) = \frac{a_2}{|a|}$ indenfor intervallet $]-\pi; \pi]$, kan man tegne stedvektoren til a i et koordinatsystem. Her kan man se hvilken vinkel, der er tale om, og så nøjes med at bruge enten cosinus eller sinus (eller tangens) til bestemmelse af vinklen. Det er nok det letteste i praksis.

Eksempel



Tallet a fra forrige eksempel er afsat i planen, og der er tegnet en enhedscirkel. Her kan man se, at hovedargumentet ligger mellem $\pi/2$ og π. Derfor er det lettest at bruge cosinus til at bestemme vinklen, idet sinus vil give en vinkel i 1. kvadrant.

Opgave 5

Eksempel

Hvis et komplekst tal er givet ved polære koordinater, kan man omskrive, så tallet står på den sædvanlige facon.

Et komplekst tal er givet ved $|a| = 6$ og $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$. Så gælder altså

$$a = 6(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) \quad \Leftrightarrow$$

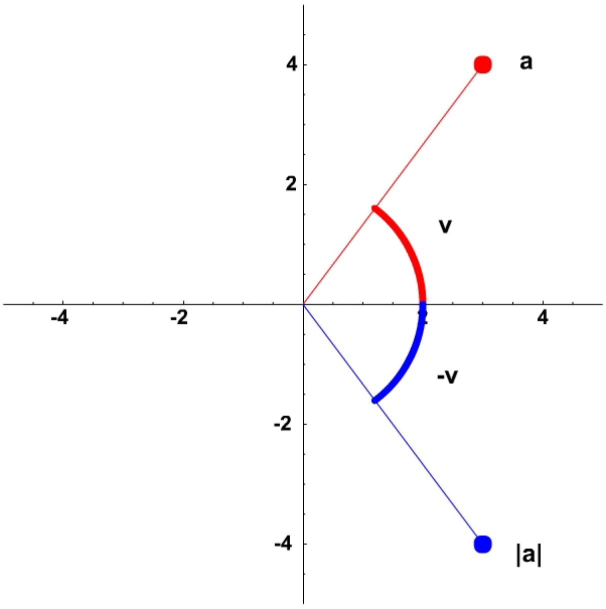
$$a = 6(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \Leftrightarrow$$

$$a = 3 + 3\sqrt{3}i$$

Opgave 6

Konjugering

Hvis $a = a_1 + a_2$, så er $\overline{a} = a_1 - a_2$, og heraf kan vi se, at konjugering af et tal svarer til at spejle tallet i 1.aksen. Der gælder derfor, at $\arg(\overline{a}) = -\arg(a)$.



Et tal og det konjugerede tal

Idet $|a| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$ får vi

$$a\bar{a} = (a_1 + ia_2)(a_1 - ia_2) = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = |a|^2$$

altså $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$. Desuden er $|\bar{a}| = |a|$.

Øvelse

Vis at $|\bar{a}| = |a|$.

Hvis a skrives på formen $a = |a|(\cos(v) + i\sin(v))$, så er $\bar{a} = |\bar{a}|(\cos(-v) + i\sin(-v))$. Da $\cos(-v) = \cos(v)$ og $\sin(-v) = -\sin(v)$, og da $|\bar{a}| = |a|$, får vi her to skrivemåder for $\bar{a}$:

$$\bar{a} = |a|(\cos(-v) + i\sin(-v)) \text{ og } \bar{a} = |a|(\cos(v) - i\sin(v))$$

hvor v er et argument af a.

Multiplikation og division i polære koordinater

Hvis to komplekse tal a og b er givet i polære koordinater, altså ved modulus og argument, kan multiplikation og division udtrykkes simpelt.

Sætning 1

Hvis $a \neq 0$ gælder $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ og $\arg(\frac{1}{a}) = -\arg(a)$.

Bevis

Hvis $\arg(a) = u$ så er $a = |a|(\cos(u) + i\sin(u))$ og $\bar{a} = |a|(\cos(-u) + i\sin(-u))$. Vi ved desuden, at $a\bar{a} = |a|^2$ og det kan omskrives til $\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$. Vi får nu:

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{|a|(\cos(-u) + i\sin(-u))}{|a|^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}(\cos(-u) + i\sin(-u))$$

Nu er $\frac{1}{a}$ skrevet ved hjælp af modulus og argument, hvoraf vi aflæser, at $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ og $\arg(\frac{1}{a}) = -\arg(a)$.

■

Sætning 2:

$|a \cdot b| = |a||b|$ og $\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$

Bevis:

Hvis $a = |a|(\cos(u) + i\sin(u)$ og $b = |b|(\cos(v) + i\sin(v))$ får vi

$$a \cdot b = |a|(\cos(u) + i\sin(u)) \cdot |b|(\cos(v) + i\sin(v)) \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot b = |a||b|(\cos(u) + i\sin(u)) \cdot (\cos(v) + i\sin(v)) \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot b = |a||b|((\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)) + i(\cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v))$$

Ved brug af de to additionsformler

$$\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) = \cos(u + v)$$

og

$$\cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v) = \sin(u + v)$$

får vi nu

$$a \cdot b = |a||b|(\cos(u + v) + i\sin(u + v))$$

Heraf ser vi at $|a \cdot b| = |a||b|$ og $\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$

■

Eksempel

Hvis a og b er givet ved $|a| = 5$, $\arg(a) = -\frac{\pi}{3}$ og $|b| = 3, \arg(b) = \pi$, så er

$$|a \cdot b| = 5 \cdot 3 = 15 \text{ og } \arg(a \cdot b) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

Vi kan også omregne, så tallet står på sædvanlig form:

$$a \cdot b = 15(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 15(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{15}{2} + i\frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Sætning 3:

Hvis $b \neq 0$, så er $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ og $\arg(\frac{a}{b}) = \arg(a) - \arg(b)$

Bevis

Lad $a = |a|(\cos(u) + i\sin(u))$ og $b = |b|(\cos(v) + i\sin(v))$. Så gælder ifølge sætning 1

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{|b|}(\cos(-v) + i\sin(-v))$$

Vi bruger nu sætning 2, men med $\frac{1}{b}$ indsat i stedet for b:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = |a| \cdot \frac{1}{|b|}(\cos(u + (-v)) + i\sin(u + (-v))) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} == \frac{|a|}{|b|}(\cos(u - v) + i\sin(u - v))$$

Heraf aflæses det ønskede.

■

Eksempel

Hvis a og b er givet ved $|a| = 6$, $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$ og $|b| = 3, \arg(b) = -\frac{\pi}{6}$, så er

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{6}{3} = 2 \text{ og } \arg(\frac{a}{b}) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3}$$

Sætning 4:

$|a^n| = |a|^n$ og $\arg(a^n) = n \cdot \arg(a), n \in N$

Bevis

Beviset er et induktionsbevis. Vi vil starte med at vise, at sætningen er sand for $n=1$ og $n=2$. Da

$$|a| = |a^1| = |a|^1 \text{ og } \arg(a) = \arg(a^1) = 1\arg(a)$$

glæder sætningen for $n=1$.

Ifølge sætning 2 gælder sætningen også for $n=2$:

$$|a^2| = |a \cdot a| = |a||a| = |a|^2$$

og

$$\arg(a^2) = \arg(a \cdot a) = \arg(a) + \arg(a) = 2\arg(a)$$

Vi antager nu, at sætningen er sand for et naturligt tal $n-1$. Vi vil vise, at så gælder sætningen også for n.

$$|a^n| = |a^{n-1} \cdot a| = |a^{n-1}||a| = |a|^{n-1}|a| = |a|^n$$

og

$$\arg(a^n) = \arg(a^{n-1} \cdot a) = \arg(a^{n-1}) + \arg(a) = (n-1)\arg(a) + \arg(a) = n\arg(a)$$

Vi kan altså skrive a^n på formen

$$a^n = |a|^n(\cos(n \cdot v) + i\sin(n \cdot v))$$

hvor v = arg(a).

■

Øvelse

Vis, at sætning 4 gælder for $n \in Z$.

Eksempel

Et komplekst tal er givet ved $|a| = 2, \arg(a) = \frac{\pi}{2}$. Så er $a_1 = 2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $a_2 = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$, dvs. $a = a_1 + ia_2 = 2i$. Vi vil nu beregne a^2, a^3 og a^4.

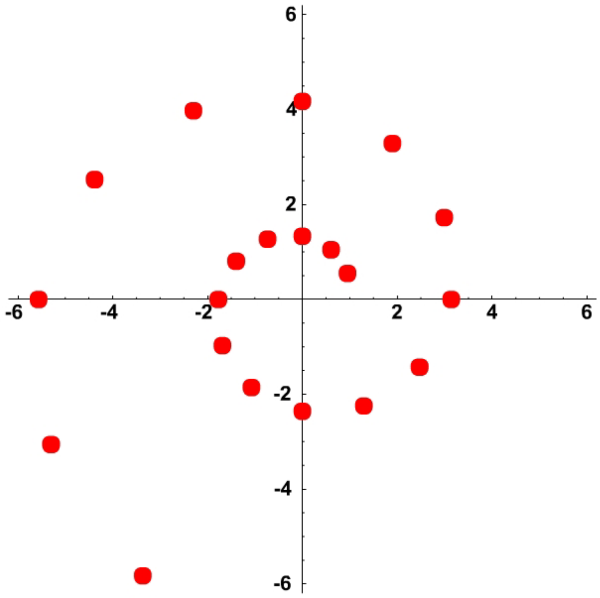
$$|a^2| = 2^2 = 4, \arg(a^2) = \frac{2\pi}{2} = \pi,\ \ a^2 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -4$$

$$|a^3| = 2^3 = 8, \arg(a^3) = \frac{3\pi}{2},\ \ a^3 = 8(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -8i$$

$$|a^4| = 2^4 = 16, \arg(a^4) = \frac{4\pi}{2} = 2\pi,\ \ a^4 = 16(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 16$$

Eksempel

Et tal a er givet ved $|a| = 1{,}1$ og $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$. Tallene a^n, n = 1,2, …, 20 er afbildet i koordinatsystemet nedenfor.



Opgave 7

Quiz 3

Ligningen $z^n = a$

Inden vi går i gang med andengradsligningen, vil vi først se på n'te-gradsligningen $z^n = a$, og derefter på den simple andengradslingning, $z^2 = a$.

Sætning 5:

Ligningen $z^n = a$ har løsningerne:

$$z = \sqrt[n]{|a|}(\cos(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}),\ p = 0, 1, 2, ..., n-1$$

hvor v = arg(a).

Bevis

Vi finder først modulus af z. Ifølge sætning 4 gælder

$$|z^n| = |z|^n$$

og da

$$\left|z^n\right| = |a|$$

får vi

$$\left|z^n\right| = |z|^n = |a| \quad \Leftrightarrow \quad |z| = \sqrt[n]{a}$$

Ifølge sætning 4 gælder

$$\arg(z^n) = n\arg(z)$$

Idet v er et argument af a i intervallet $\left]-\pi, \pi\right]$ gælder, at samtlige argumenter af a er givet ved $v + p2\pi, p \in Z$. Derfor er argumentet af z også lig med

$$\arg(z^n) = v + p2\pi, p \in Z$$

Argumentet a z kan nu findes

$$\arg(z^n) = n\arg(z) = v + p2\pi, p \in Z \quad \Leftrightarrow$$

$$\arg(z) = \frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}, p \in Z$$

Der er således uendelig mange argumenter, men det er nok at se på p = 0, 1, 2, ..., n-1, idet alle øvrige værdier af p giver argumenter af z, som er identiske med de allerede fundne, på nær multipla af 2π. Fx vil p = n give $\frac{v}{n} + 2\pi$. Derfor er løsningerne givet ved

$$z = \sqrt[n]{|a|}(\cos(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}), \ p = 0, 1, 2, ..., n-1$$

■

Af løsningsformlen til ligningen $z^n = a$ ser vi, at alle løsninger har samme modulus. Har man fundet løsningen for p = 0 og afsat den i den komplekse plan, ses det, at den næste løsning findes ved at dreje den første løsning vinklen $\frac{2\pi}{n}$ omkring (0,0), og så fremdeles. De n løsninger vil altså ligge som hjørner i en regulær n-kant med centrum i (0,0).

Eksempel

Vi vil løse ligningen $z^n = 64$. Modulus af z er givet ved $|z| = \sqrt[5]{64} = 2$. Argumentet af z^5 er 0, da 64 ligger på den positive del af den reelle akse. Argumenterne af de 5 løsninger er så

$$\arg(z) = 0 + p\frac{2\pi}{5}, \ p = 0, 1, 2, 3, 4$$

altså, argumenterne er

$$0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5} \text{ og } \frac{8\pi}{5}$$

I intervallet $]-\pi; \pi]$ får vi argumenterne

$$0, \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}$$

Løsningerne bliver nu, idet vi husker at $\cos(-v) = \cos(v)$ og $\sin(-v) = -\sin(v)$

$z_1 = 2$

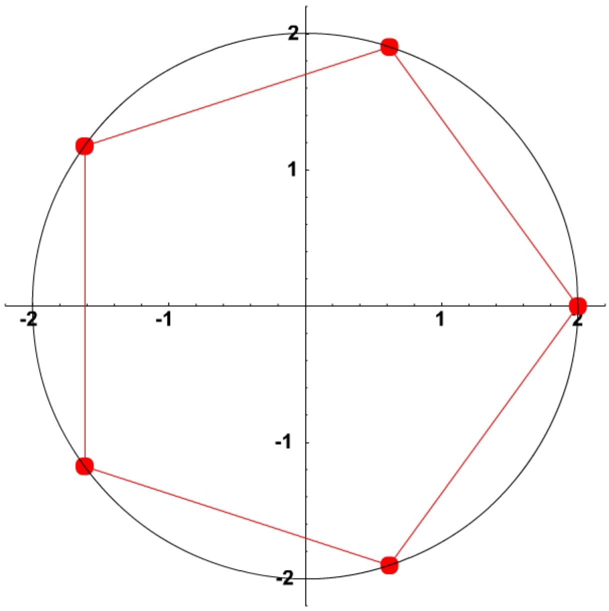
$z_2 = 2(\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}))$

$z_3 = 2(\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\sin(\frac{4\pi}{5}))$

$z_4 = 2(\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\sin(\frac{4\pi}{5}))$

$z_5 = 2(\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5}))$

Løsningerne bliver hjørnerne i en regulær femkant:



Løsninger til ligningen $z^5 = 64$

Man kan altså ved at løse ligningen $z^n = 64$ og afsætte løsningerne i den komplekse talplan konstruere en regulær 5-kant.

Opgave 8

Ligningen $z^2 = a$

Inden vi går i gang med den generelle andengradsligning, vil vi først se på den simple andengradsligning, $z^2 = a$.

Sætning 6:

Andengradsligingen $z^2 = a$ har rødderne

$$z = \pm\sqrt{|a|}(\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$$

hvor $|a|$ er modulus af a, og $\arg(a) = v$.

Bevis

Af sætning 5 ses, at ligningen $z^2 = a$ har rødderne

$$z = \sqrt[2]{|a|}(\cos(\frac{v}{2} + p\frac{2\pi}{2}) + i\sin(\frac{v}{2} + p\frac{2\pi}{2}),\ p = 0, 1$$

altså

$$z_1 = \sqrt{|a|}\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$$

og

$$z_2 = \sqrt{|a|}\cos(\frac{v}{2} + \pi) + i\sin(\frac{v}{2} + \pi))$$

Da $\cos(\frac{v}{2} + \pi) = -\cos(\frac{v}{2})$ og $\sin(\frac{v}{2} + \pi) = -\sin(\frac{v}{2})$ ses det, at $z_2 = -z_1$, altså kan rødderne skrives

$$z = \pm\sqrt{|a|}\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$$

■

Vi vil nu definere, hvad der skal forstås ved kvadratroden af et komplekst tal:

Definition 3

Kvadratroden af et komplekst tal a er givet ved

$$\sqrt{a} = \sqrt{|a|}\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$$

hvor $v = \arg(a)$

Med denne definition kunne vi formulere sætning 6 således:

Andengradsligningen $z^2 = a$ har rødderne $\pm\sqrt{a}$.

Vi vil se på beregning af kvadratrødder i nogle eksempler.

Eksempel

Vi vil løse ligningen $z^2 = 4$.

Her ligger $a = 4$ på den positive del af den reelle talakse. Så er $v = 0$ og dermed er også $\frac{v}{2} = 0$. Desuden er $\sqrt{|a|} = 2$, og vi får

$$z = \pm 2(\cos(0) + i\sin(0)) = \pm 2.$$

Ved brug af definitionen ovenfor får vi: $\sqrt{4} = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2$. Vi ser altså, at symbolet $\sqrt{4}$ heldigvis har samme betydning som det tilsvarende reelle symbol.

Ved i eksemplet ovenfor at erstatte tallet 4 med et vilkårligt reelt tal a, hvor $a \geq 0$, kan vi se, at symbolet $\sqrt{a}$ har samme betydning inde for de reelle tal og de komplekse tal, når altså blot $a \geq 0$.

Eksempel

Vi vil løse ligningen $z^2 = -1$.

Her er $a = -1$ og dermed $\sqrt{|a|} = 1$, og vinklen mellem a og den positive del af den reelle talakse er $v = \pi$. Så er $\frac{v}{2} = \frac{\pi}{2}$, og løsningerne bliver

$$z = \pm 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = \pm i$$

Ved brug af definitionen ovenfor får vi: $\sqrt{-1} = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = i$. Vi ser altså, at definition 1 og definition 3 stemmer overens.

Eksemplet ovenfor kan let generaliseres til at vise, at hvis a er et vilkårligt reelt tal hvor $a \geq 0$, så er $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$.

Øvelse

Vis, at hvis $a \geq 0$, så er $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

Opgave 9

Eksempel

Vi vil løse ligningen $z^n = 2 - 3i$.

Her er $a = 2 - 3i$, og $|a| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, og vi finder $v = \arg(a)$ ved at løse ligningerne $\cos(v) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ og $\sin(v) = \frac{-3}{\sqrt{13}}$. Den løsning, der tilfredsstiller begge ligninger er $v = -0{,}98279$, og dermed er $\frac{v}{2} = -0{,}49140$.

Løsningen til ligningen $z^n = 2 - 3i$ er så

$$z = \pm\sqrt{\sqrt{13}}(\cos(-0{,}49140) + i\sin(-0{,}49140)) \quad \Leftrightarrow$$

$$z = \pm(1{,}6741 - 0{,}8960i)$$

og vi ser heraf endvidere at

$$\sqrt{2 - 3i} = 1{,}6741 - 0{,}8960i.$$

Vi har nu set tre eksempler på beregning af kvadratrødder af komplekse tal. Man kan ifølge definition 3 uddrage kvadratroden af alle komplekse tal, mens man indenfor de reelle tal jo kun kan tage kvadratroden af et tal, som er større end eller lig med nul. Inden for de reelle tal gælder forskellige regneregler, fx $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Disse regneregler gælder ikke inden for de komplekse tal.

Øvelse

Sæt $a = -1$ og $b = -1$ og vis, at brug af regnereglen $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ kan føre til en modstrid.

Opgave 10

Andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$

Sætning 7:

Andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$. har rødderne

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

hvor $d = b^2 - 4ac$.

Bevis:

Da $a \neq 0$, kan vi omskrive andengradsligningen:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a}z + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$4a^2(z + \frac{b}{2a})^2 = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow$$

$$(2a(z + \frac{b}{2a}))^2 = b^2 - 4ac$$

Nu kalder vi det, der står på venstre side af lighedstegnet for y^2 og det, der står på højre side for d, og får så ligningen

$$y^2 = d$$

Denne ligning har ifølge sætning 6 løsningen

$$y = \pm\sqrt{|d|}(\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$$

hvor v er et argument af d. Idet $\sqrt{d} = \sqrt{|d|}(\cos(\frac{v}{2}) + i\sin(\frac{v}{2}))$, kan dette også skrives

$$y = \pm\sqrt{d}$$

og vi får derved

$$y = 2a(z + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{d} \quad \Leftrightarrow$$

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a} \quad \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Vi får altså, at løsningsformlen får det samme udseende som for reelle tal.

■

Eksempel:

Ligningen

$$z^2 + (1-5i)z - (8+4i) = 0$$

har diskriminanten

$$d = (1-5i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(8+4i)) = 8 + 6i$$

Vi får så

$$|d| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

og skal finde v ud fra de to ligninger

$$\cos(v) = \frac{8}{10} \text{ og } \sin(v) = \frac{6}{10}$$

Løsningen er $v = 0{,}64350$ og dermed er $\frac{v}{2} = 0{,}32175$.

Nu kan vi beregne kvadratroden af d:

$$\sqrt{d} = \sqrt{10}(\cos(0{,}32175) + i\sin(0{,}32175)) = 3 + i$$

og endelig kan vi beregne løsningerne:

$$z = \frac{-(1-5i) \pm (3+i)}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1+3i \\ -2+2i \end{cases}$$

Opgave 11

Andengradsligninger med reelle koefficienter

Sætning 8

Hvis a, b og c er reelle tal, og d < 0, så er de to rødder i andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0\,,\ a \neq 0$$

hinandens konjugerede.

Bevis

De to rødder er

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

og

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

Da d er negativ, er $\arg(d) = \pi$, og dermed er

$$\sqrt{d} = \sqrt{|d|}(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2})) = \sqrt{|d|} \cdot i$$

Vi får nu

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i \cdot \frac{\sqrt{|d|}}{2a} \text{ og } z_2 = -\frac{b}{2a} - i \cdot \frac{\sqrt{|d|}}{2a}$$

Da $\frac{-b}{2a}$ og $\frac{\sqrt{|d|}}{2a}$ begge er reelle tal, er $z_2 = \overline{z_1}$

■

Vi ser altså, at i det tilfælde, hvor en andengradsligning med reelle koefficienter ikke har nogen reelle rødder, vil der være to komplekse rødder, der er hinandens konjugerede.

Eksempel

Andengrandsligningen

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

har diskriminanten $d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$.

Vi får så $\sqrt{d} = \sqrt{|d|} \cdot i = 2i$, og løsningerne bliver

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \text{ og } z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

Opgave 12